PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 3. 1. Februar 1918. Redaktionsschluß für No. 5 am 6. Februar 1918. 19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:
H. Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. S. 33.
A. Podjed, Diffusion und Statistik. S. 39.
R. Malmström, Zur Theorie der Versuche von Kaufmann und Bucherer über β-Strahlen. S. 43.
A. Johnsen u. O. Toeplitz, Über die mathematische Auswertung der Debye-Scherrerschen Röntgenspektrogramme. S. 47.

Besprechungen:
W. Porstmann, Normenlehre. S. 55.
M. Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. S. 56.
Personalien. S. 56.
Angebote. S. 56.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie.

Von Hans Thirring.

Die Überlegungen, denen die vorliegende Arbeit ihr Entstehen verdankt, lassen sich am besten klarmachen durch ein Zitat aus Einsteins grundlegender Arbeit vom Jahre 1914[1]). Er sagt da einleitend folgendes:

„Zunächst scheint es nun allerdings, daß eine derartige Erweiterung der Relativitätstheorie aus physikalischen Gründen abzulehnen sei. Es sei nämlich K ein im Galilei-Newtonschen Sinne berechtigtes Koordinatensystem, K' ein relativ zu K gleichförmig rotierendes Koordinatensystem. Dann wirken auf relativ zu K' ruhende Massen Zentrifugalkräfte, während auf relativ zu K ruhende Massen solche nicht wirken. Hierin sah bereits Newton einen Beweis dafür, daß man die Rotation von K' als eine „absolute“ aufzufassen habe, daß man also K' nicht mit demselben Rechte wie K als „ruhend“ behandeln könne. Dies Argument ist aber — wie insbesondere E. Mach ausgeführt hat — nicht stichhaltig. Die Existenz jener Zentrifugalkräfte brauchen wir nämlich nicht notwendig auf eine Bewegung von K' zurückzuführen; wir können sie vielmehr ebensogut zurückführen auf die durchschnittliche Rotationsbewegung der ponderabeln fernen Massen in der Umgebung in bezug auf K', wobei wir K' als ruhend behandeln. Lassen die Newtonschen Gesetze der Mechanik eine solche Auffassung nicht zu, so kann dies sehr wohl in Mängeln dieser Theorie begründet sein. . . .“

Da nun die Einsteinsche Theorie in den Publikationen von 1915 fertig ausgebaut zu sein scheint, liegt es nahe zu fragen: Ist die neue Theorie insofern frei von den Mängeln der Newtonschen, als tatsächlich die Rotation ferner Massen gemäß ihren Gleichungen ein Gravitationsfeld erzeugt, das einem „Zentrifugalfeld“ äquivalent ist? Man wird vielleicht versucht sein, eine Diskussion dieser Frage für müßig zu halten, indem man sagt, daß die geforderte Äquivalenz durch die allgemeine Kovarianz der Feldgleichungen gewährleistet sei. Nun liegt die Sache aber doch nicht ganz so einfach, da ja auch die Randbedingungen für die $g_{\mu\nu}$ im räumlich Unendlichen eine Rolle spielen. Die diesbezüglichen Fragen prinzipieller Natur sind in den Arbeiten von De Sitter[1]) und Einstein[2]) behandelt worden. Es soll nun im folgenden auf diese allgemeinen Fragen nicht eingegangen werden; wir wollen vielmehr an einem speziellen konkreten Beispiel das Feld rotierender ferner Massen durchrechnen und studieren. Zu diesem Zwecke eignet sich ausgezeichnet die von Einstein[3]) angegebene Methode der näherungsweisen Integration der Feldgleichungen, welche den folgenden Rechnungen als Grundlage dienen soll. Wir wählen als Beispiel das Feld im Innern einer gleichförmig rotierenden, unendlich dünnen Hohlkugel, welche mit konstanter Massendichte belegt ist.

Im ersten Abschnitte dieser Arbeit (welcher ohne Beeinträchtigung des Verständnisses für das folgende überschlagen werden kann) wird die näherungsweise Berechnung der $g_{\mu\nu}$ für das Innere der Kugelschale durchgeführt, im zweiten Abschnitt wird die Bewegung eines Massenpunktes in diesem Felde diskutiert.

A. Rechnerischer Teil: Die Berechnung der $g_{\mu\nu}$ für die Umgebung des Mittelpunktes der rotierenden Hohlkugel.

Bezeichnungen:

a Radius der Hohlkugel;
M ihre Masse;

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1914, S. 1030; vgl. auch Ann. d. Phys. **49**, 769, 1916.

1) De Sitter, Amsterdam Proc. **19**, 527, 1917.
2) A. Einstein, Berl. Ber. 1917, S. 142.
3) A. Einstein, Berl. Ber. 1916, S. 688.

ω ihre Winkelgeschwindigkeit;
x, y, z rechtwinkelige Koordinaten eines Punktes der Kugeloberfläche;
x_0, y_0, z_0 Koordinaten des Aufpunktes;
$\varkappa$ Gravitationskonstante;
ϱ_0 natürliche gemessene Raumdichte der Materie.

Was die Gesichtspunkte der bei der Feldberechnung benutzten Approximationen anlangt, ist folgendes vorauszuschicken: Das Feld in der Umgebung des Kugelmittelpunktes wird als so schwach betrachtet, daß in den Feldgleichungen nur die Glieder, welche in bezug auf die Größen $\gamma_{\mu\nu}$ erster Ordnung sind, in Rechnung gesetzt werden ($\gamma_{\mu\nu}$ definiert durch: $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$). Diese Vernachlässigung ermöglicht die Verwendung der Einsteinschen Methode der näherungsweisen Integration der Feldgleichungen. Nach dem zweiten oft benutzten Gesichtspunkt der Approximation werden die Geschwindigkeitskomponenten der ponderabeln Materie als klein gegenüber der Einheit (Lichtgeschwindigkeit) angesehen, so daß in jener gröbsten Näherung, welche auf die Newtonsche Theorie führt, schon ihre ersten Potenzen vernachlässigt werden können. Wir wollen diese Approximation — die von der ersten völlig unabhängig ist — nur insoweit anwenden, als wir die Glieder dritter und höherer Ordnung in den Geschwindigkeiten gegen 1 streichen. Schließlich beziehen sich unsere Rechnungen auf die Umgebung des Kugelmittelpunktes; sei r der Abstand Aufpunkt—Kugelmittelpunkt und R der Abstand Aufpunkt—Integrationselement, so werden wir $\frac{1}{R}$ in eine Potenzreihe nach $\frac{r}{a}$ entwickeln, die wir nach der zweiten Potenz abbrechen werden.

Die Einsteinsche Methode der näherungsweisen Integration liefert zur Berechnung der $g_{\mu\nu}$ folgende Vorschriften:

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \qquad \begin{matrix}\delta_{\mu\nu} = 1, & \mu = \nu,\\ = 0, & \mu_{\alpha} \neq \nu,\end{matrix} \tag{1}$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}' - \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha\alpha}', \tag{2}$$

$$\gamma_{\mu\nu}' = -\frac{\varkappa}{2\pi}\int\frac{T_{\mu\nu}(x, y, z, t-r)}{R}\,dV_0. \tag{3}$$

Dabei ist $T_{\mu\nu}$ der kovariante Energietensor der Materie, dV_0 das räumliche Volumelement des Integrationsraumes,

$$R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2.$$

Die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ des Linienelements beziehen sich auf die Koordinaten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = it$.

Nach dem ersten Gesichtspunkt der Approximation dürfen wir den kovarianten Energietensor durch den kontravarianten ersetzen; er ist bei Vernachlässigung der Spannungen gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} T_{\mu\nu} = T^{\mu\nu} &= \varrho_0\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = \\ &= \varrho_0\frac{dx_\mu}{dx_4}\frac{dx_\nu}{dx_4}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Hohlkugel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse, dann gilt für einen ihrer Punkte, der die Polarkoordinaten a, ϑ, φ hat:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_4} &= -i\frac{dx}{dt} = i\,a\,\omega\sin\vartheta\sin\varphi,\\ \frac{dx_2}{dx_4} &= -i\frac{dy}{dt} = -i\,a\,\omega\sin\vartheta\cos\varphi,\\ \frac{dx_3}{dx_4} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Diese Werte liefern in (4) eingesetzt für $T_{\mu\nu}$ das folgende Schema:

$$T_{\mu\nu} = \varrho_0\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2\begin{Vmatrix} -a^2\omega^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi, & +a^2\omega^2\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi, & 0 & i\,a\,\omega\sin\vartheta\sin\varphi\\ +a^2\omega^2\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi, & -a^2\omega^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi, & 0 & -i\,a\,\omega\sin\vartheta\cos\varphi\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ i\,a\,\omega\sin\vartheta\sin\varphi, & -i\,a\,\omega\sin\vartheta\cos\varphi, & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Da wir unter ϱ_0 die natürlich gemessene Dichte der Materie verstehen, haben wir, um den Tensorcharakter des Integrals (3) zu wahren, für dV_0 ebenfalls das natürlich gemessene räumliche Volumelement zu setzen. Für dieses gilt die Formel[1]):

$$dV_0 = \sqrt{g}\,i\,\frac{dx_4}{ds}\,dV. \tag{7}$$

Für die Integration führen wir Polarkoordinaten ein, daher

$$\sqrt{g}\,dV = a^2\,da\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi. \tag{8}$$

Schließlich haben wir noch $\frac{1}{R}$ durch die Integrationsvariabeln auszudrücken. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der Aufpunkt in die Z—X-Ebene fällt, seine Koordinaten sind dann:

$$x_0 = r\sin\vartheta_0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = r\cos\vartheta_0.$$

Dann gilt:

$$R^2 = (a\sin\vartheta\cos\vartheta - r\sin\vartheta_0)^2 + a^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + (a\cos\vartheta - r\cos\vartheta_0)^2 =$$
$$= a^2\left[1 - \frac{2r}{a}(\sin\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta_0 + \cos\vartheta\cos\vartheta_0) + \frac{r^2}{a^2}\right].$$

Entwicklung in die binomische Reihe liefert mit den eingangs angegebenen Vernachlässigungen:

1) Vgl. Einstein, Berl. Ber. 1914, S. 1058, Gl. (47a).

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{a}\left\{1+\frac{r}{a}(\sin\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta_0+\cos\vartheta\cos\vartheta_0)-\right.$$
$$-\frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}+$$
$$\left.+\frac{3}{2}\frac{r^2}{a^2}(\sin\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta_0+\cos\vartheta\cos\vartheta_0)^2\right\}. \quad (9)$$

Wir bezeichnen den Ausdruck in der geschlungenen Klammer mit K und schreiben:

$$\frac{1}{R}=\frac{K}{a}. \quad (9a)$$

Einsetzen von (6), (7), (8) und (9a) in (3) gibt:

$$\gamma_{11}'=\frac{i\varkappa}{2\pi}\varrho_0 a^3\omega^2 da\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3\sin^3\vartheta\sin^2\varphi K,$$
$$\gamma_{22}'=\frac{i\varkappa}{2\pi}\varrho_0 a^3\omega^2 da\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3\sin^3\vartheta\cos^2\varphi K,$$
$$\gamma_{44}'=-\frac{i\varkappa}{2\pi}\varrho_0 a\,da\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3\sin\vartheta K,$$
$$\gamma_{12}'=-\frac{i\varkappa}{2\pi}\varrho_0 a^3\omega^2 da\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3\sin^3\vartheta\sin\varphi\cos\varphi K, \quad (10)$$
$$\gamma_{14}'=\frac{\varkappa}{2\pi}\varrho_0 a^2\omega\,da\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3\sin^2\vartheta\sin\varphi K,$$
$$\gamma_{24}'=-\frac{\varkappa}{2\pi}\varrho_0 a^2\omega\,da\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3\sin^2\vartheta\cos\varphi K,$$
$$\gamma_{13}'=\gamma_{23}'=\gamma_{33}'=\gamma_{43}'=0.$$

Der Absolutwert der Größe $\frac{dx_4}{ds}$ unterscheidet sich von der Einheit nur um Glieder von der Größenordnung ω^2a^2; sie tritt in den kleinen Größen erster Ordnung $\gamma_{\mu\nu}'$ als Faktor auf; es genügt daher, wenn man sie aus dem Ausdruck „nullter" Annäherung für das Linienelement berechnet:

$$ds^2=-dx_1^2-dx_2^2-dx_3^2-dx_4^2,$$
$$\frac{ds^2}{dx_4^2}=-1-\frac{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}{dx_4^2}=$$
$$=-1+\omega^2a^2\sin^2\vartheta, \quad (11)$$
$$\frac{ds}{dx_4}=i\left(1-\frac{\omega^2a^2}{2}\sin^2\vartheta\right);$$
$$\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3=i\left(1+\frac{3}{2}\omega^2a^2\sin^2\vartheta\right).$$

Da unsere Rechnungsgenauigkeit sich nur bis auf Glieder der Ordnung ω^2a^2 erstreckt, können wir in allen jenen $\gamma_{\mu\nu}'$, welche den Faktor ωa schon enthalten, $\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^3=i$ setzen; bloß für γ_{44}' verwenden wir den Ausdruck (11). Wir setzen noch

$$\varrho_0\,da=\sigma,$$

dann gehen Gl. (10) über in:

$$\gamma_{11}'=-\frac{\varkappa}{2\pi}\sigma a^3\omega^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\sin^3\vartheta\sin^2\varphi K,$$
$$\gamma_{22}'=-\frac{\varkappa}{2\pi}\sigma a^3\omega^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\sin^3\vartheta\cos^2\varphi K,$$
$$\gamma_{44}'=-\frac{\varkappa}{2\pi}\sigma a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\sin\vartheta K\left(1+\frac{3}{2}\omega^2a^2\sin^2\vartheta\right),$$
$$\gamma_{12}'=\frac{\varkappa}{2\pi}\sigma a^3\omega^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\sin^3\vartheta\sin\varphi\cos\varphi K,$$
$$\gamma_{14}'=\frac{i\varkappa}{2\pi}\sigma a^2\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\sin^2\vartheta\sin\varphi K,$$
$$\gamma_{24}'=-\frac{i\varkappa}{2\pi}\sigma a^2\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\sin^2\vartheta\cos\varphi K;$$
$$\gamma_{13}'=\gamma_{23}'=\gamma_{33}'=\gamma_{34}'=0. \quad (12)$$

Wenn man in diese Ausdrücke den Wert von K aus (9) einsetzt und die Integrale auswertet, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{11}' &= -\frac{\varkappa}{2\pi}\frac{M}{3a}a^2\omega^2\left(1-\frac{r^2}{5a^2}\right),\\
\gamma_{22}' &= -\frac{\varkappa}{2\pi}\frac{M}{3a}a^2\omega^2\left\{1-\frac{r^2}{5a^2}(1-3\sin^2\vartheta_0)\right\},\\
\gamma_{44}' &= \frac{\varkappa}{2\pi}\frac{M}{a}\left\{1+a^2\omega^2\left[1-\frac{r^2}{5a^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\vartheta_0\right)\right]\right\},\\
\gamma_{24}' &= -\frac{i\varkappa}{2\pi}\frac{M}{3a}\omega r\sin\vartheta_0,\\
\gamma_{12}' &= \gamma_{14}' = \gamma_{13}' = \gamma_{23}' = \gamma_{33}' = \gamma_{43}' = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Aus diesen Werten erhält man unter Verwendung der Gleichungen (1) und (2) die $\gamma_{\mu\nu}$ und hernach die $g_{\mu\nu}$. Wir setzen noch an Stelle der Polarkoordinaten r und ϑ_0 des Aufpunktes seine rechtwinkeligen Koordinaten und ersetzen die Einsteinsche Gravitationskonstante $\varkappa$ durch die gewöhnliche: $k=\frac{\varkappa}{8\pi}$ (Lichtgeschwindigkeit = 1). Dann ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
g_{11} &= -1-\frac{2kM}{a}\left\{1+a^2\omega^2-\frac{\omega^2}{10}(2z_0^2+x_0^2)\right\},\\
g_{22} &= -1-\frac{2kM}{a}\left\{1+a^2\omega^2-\frac{\omega^2}{10}(2z_0^2-3x_0^2)\right\},\\
g_{33} &= -1,\\
g_{44} &= -1+\frac{2kM}{a}\left\{1+\frac{5a^2\omega^2}{3}-\frac{\omega^2}{6}(2z_0^2-x_0^2)\right\},\\
g_{24} &= -i\frac{4kM}{3a}\omega x_0,
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

alle übrigen $g_{\mu\nu}$ verschwinden.

Wir wollen uns nun noch von der speziellen Wahl des Koordinatensystems frei machen. (Wir hatten ja den Aufpunkt in die $z-x$-Ebene gelegt.) Zu diesem Zwecke machen wir die Transformation:

$$\left.\begin{aligned}
x_1' &= x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha,\\
x_2' &= -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha,\\
x_3' &= x_3,\\
x_4' &= x_4.
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Dann geht mittels der Transformationsformel für einen kovarianten Tensor zweiten Ranges

$$g_{\sigma\tau}' = \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\sigma'}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\tau'}g_{\mu\nu}$$

das Koeffizientenschema über in:

$$g_{\mu\nu}=\left|\begin{array}{cccc}
-1-\frac{2kM}{a}\left[1+a^2\omega^2-\frac{\omega^2}{10}(2z^2+x^2-3y^2)\right], & +\frac{2kM}{a}\frac{\omega^2}{5}xy, & 0, & +i\frac{4kM}{3a}\omega y,\\
+\frac{2kM}{a}\frac{\omega^2}{5}xy, & -1-\frac{2kM}{a}\left[1+a^2\omega^2-\frac{\omega^2}{10}(2z^2-3x^2+y^2)\right], & 0, & -i\frac{4kM}{3a}\omega x,\\
0, & 0, & -1, & 0,\\
+i\frac{4kM}{3a}\omega y, & -i\frac{4kM}{3a}\omega x, & 0, & -1+\frac{2kM}{a}\left[1+\frac{5a^2\omega^2}{3}+\frac{\omega^2}{6}(2z^2-x^2-y^2)\right]
\end{array}\right|\quad(16)$$

Der Index o bei den Koordinaten ist hier weggelassen; x, y, z bedeuten von nun an die Koordinaten des Aufpunktes.

B. Physikalischer Teil: Die Bewegung eines Massenpunktes im Innern der rotierenden Hohlkugel.

Wir wollen die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes aufstellen, der sich in der Nähe des Mittelpunktes unserer rotierenden Kugelschale befindet. Das Feld in dieser Umgebung ist charakterisiert durch das Koeffizientenschema der $g_{\mu\nu}$ (Gl. (16) des ersten Abschnittes).

Das Bewegungsgesetz für einen Massenpunkt ist in der Einsteinschen Theorie bekanntlich gegeben durch die Bedingung

$$\delta\int ds = 0,$$

oder, wenn man die Variation ausführt:

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = \Gamma^\tau_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\ ^1).\qquad \tau = 1\ldots 4.\quad(17)$$

1) Über Indizes, die zweimal vorkommen, ist von 1 bis 4 zu summieren.

Für die „Feldkomponenten" $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$ gilt nach dem ersten Gesichtspunkt der Approximation:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^\tau_{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix} &= \left[\begin{matrix}\mu\nu\\ \tau\end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x_\mu}+\right.\\
&\left.+\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\tau}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Wir wollen bloß Bewegungen des Massenpunktes betrachten, welche klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind, so daß wir die Quadrate und Produkte der Geschwindigkeitskomponenten vernachlässigen können. Dann kann man auf der rechten Seite der Gleichungen (17) alle jene Glieder streichen, in denen der Index 4 nicht vorkommt, und kann außerdem die Ableitungen nach s durch solche nach t ersetzen. Die Gleichungen (17) gehen dann unter Berücksichtigung von $\frac{dx_4}{dt} = i$ über in:

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = 2i\left(\Gamma^\tau_{14}\frac{dx_1}{dt}+\Gamma^\tau_{24}\frac{dx_2}{dt}+\Gamma^\tau_{34}\frac{dx_3}{dt}\right)-\Gamma^\tau_{44}.\quad(19)$$

Von den Feldkomponenten $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ kommen also für das folgende nur jene in Betracht, welche den Index 4 mindestens einmal enthalten. Das sind 16 Größen, die (obwohl sie keine Tensorkomponenten sind!) in unserem Falle sich nach dem Schema eines antisymmetrischen Tensors zweiten Ranges darstellen lassen. Denn, da im stationären Felde die partiellen Ableitungen nach x_4 sämtlich verschwinden, lassen sich die Größen $\Gamma^{\tau}_{\sigma 4}$ folgendermaßen schreiben:[1])

$$\left|\begin{array}{llll}
\Gamma^{1}_{14}=0 & \Gamma^{1}_{24}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{24}}{\partial x_1}\right) & \Gamma^{1}_{34}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{14}}{\partial x_3}-\frac{\partial g_{34}}{\partial x_1}\right) & \Gamma^{1}_{44}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} \\
\Gamma^{2}_{14}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{14}}{\partial x_2}\right) & \Gamma^{2}_{24}=0 & \Gamma^{2}_{34}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x_3}-\frac{\partial g_{34}}{\partial x_2}\right) & \Gamma^{2}_{44}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} \\
\Gamma^{3}_{14}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{14}}{\partial x_3}\right) & \Gamma^{3}_{24}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{34}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{24}}{\partial x_3}\right) & \Gamma^{3}_{34}=0 & \Gamma^{3}_{44}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} \\
\Gamma^{4}_{14}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} & \Gamma^{4}_{24}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} & \Gamma^{4}_{34}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} & \Gamma^{4}_{44}=0
\end{array}\right| \qquad (20)$$

Setzt man hier die speziellen Werte der $g_{\mu\nu}$ aus (16) ein, so ergibt sich folgendes Schema:

$$\left|\begin{array}{cccc}
0 & i\frac{4kM}{3a}\omega & 0 & -\frac{kM}{3a}\omega^2 x \\
-i\frac{4kM}{3a}\omega & 0 & 0 & -\frac{kM}{3a}\omega^2 y \\
0 & 0 & 0 & \frac{2kM}{3a}\omega^2 z \\
\frac{kM}{3a}\omega^2 x & \frac{kM}{3a}\omega^2 y & -\frac{2kM}{3a}\omega^2 z & 0
\end{array}\right| \qquad (21)$$

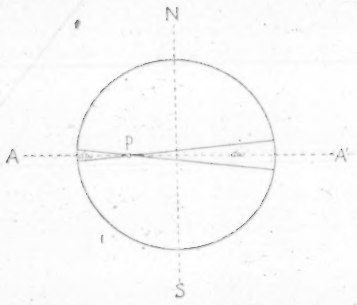
Aus (19) und (21) erhalten wir dann die Bewegungsgleichungen für unser spezielles Problem:

$$\left|\begin{array}{l}
\ddot{x}=-\frac{8kM}{3a}\omega\dot{y}+\frac{kM}{3a}\omega^2 x, \\
\ddot{y}=\frac{8kM}{3a}\omega\dot{x}+\frac{kM}{3a}\omega^2 y, \\
\ddot{z}=-\frac{2kM}{3a}\omega^2 z.
\end{array}\right| \qquad (22)$$

Die rechten Seiten der Gleichungen stellen die Komponenten der Kraft dar, welche unser Feld auf den Massenpunkt mit der Masse 1 ausübt. Wie man sieht, entspricht das erste Glied der X- und Y-Komponente vollständig der Corioliskraft, das zweite Glied der Zentrifugalkraft. Die dritte Gleichung liefert das im ersten Augenblick überraschende Ergebnis, daß diese „Zentrifugalkraft" noch eine axiale Komponente besitzt. Ihr Auftreten im Felde der rotierenden Kugel läßt sich folgendermaßen aufklären: Vom ruhenden Beobachter aus betrachtet haben jene Flächenelemente der Hohlkugel, welche sich in der Nähe des Äquators befinden, größere Geschwindigkeit, und infolgedessen auch größere scheinbare (träge und gravitierende) Masse als jene, die sich in der Umgebung der Pole befinden. Das Feld einer mit konstanter Flächendichte belegten rotierenden Hohlkugel entspricht also dem einer ruhenden Kugelschale, bei welcher die Flächendichte mit wachsendem Polabstand ϑ zunimmt. Daß im letzteren Falle Punkte, die außerhalb der Äquatorebene liegen, in sie hineingezogen werden, ist ohne weiteres verständlich.

(Man kann sich, nebenbei bemerkt, auch unschwer veranschaulichen, daß im Innern einer derart ungleichförmig mit Massendichte belegten Hohlkugel Kräfte auftreten, die der Zentrifugalkraft analog sind. In der Potentialtheorie kann man bekanntlich das Verschwinden des Kraftfeldes im Innern einer mit konstanter Flächendichte geladenen Hohlkugel so zeigen: Die Anziehungskraft der Flächenelemente, die von P aus betrachtet (vgl. Figur) unter dem Gesichtswinkel $d\omega$ gesehen werden, ist gleich und entgegengesetzt der Kraft, die von den Flächenelementen ausgeübt wird, die in dem zu $d\omega$ gehörigen Scheitelwinkel $d\omega'$ liegen. Das trifft natürlich bei ungleichförmiger Dichtebelegung nicht mehr zu. Sei AA' die Äquatorebene, dann liegen bei der in der Figur ge-

[1]) Man beachte, daß dieses Schema vollständig dem Sechservektor $\mathfrak{M}$ des elektromagnetischen Feldes entspricht. Die Analogie zwischen Elektrodynamik und (angenäherter) Gravitationstheorie geht noch weiter, wenn man bedenkt, daß bei der näherungsweisen Integration die Größen g_{14}, g_{24}, g_{34}, g_{44} sich aus der Dichte und Geschwindigkeit der Materie genau so berechnen, wie die Potentiale $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, Φ aus dem elektrischen Viererstrom, und ferner noch, daß in unserem Falle die rechten Seiten der Gl. (19) bis auf numerische Faktoren vollständig den Komponenten der ponderomotorischen Kraft $\mathfrak{E}+[v\mathfrak{H}]$ entsprechen!



zeichneten Lage des Punktes P innerhalb des Gesichtswinkels $d\omega$ Flächenelemente, die im Mittel näher zum Äquator liegen, daher spezifisch schwerer sind als die von $d\omega'$. Es resultiert also eine Kraft in der Richtung $A'A$, d. i. ein Zug senkrecht auf die Drehungsachse nach außen, die um so kleiner wird, je näher der Aufpunkt P gegen den Mittelpunkt rückt.)

Daß wir in der Natur bloß eine radiale, aber nie eine axiale Komponente der Zentrifugalkraft kennen gelernt haben, ließe sich nun mit den hier gefundenen Resultaten etwa dadurch in Einklang bringen, daß wir sagen: Die Approximation des Fixsternhimmels durch eine unendlich dünne Hohlkugel ist eben eine unrichtige. Aber selbst wenn wir unsere Approximation (etwa durch eine räumliche Massenverteilung) verbessern wollten, erhielten wir bei der hier verwendeten Integrationsmethode niemals ein Feld, das einem wirklichen Zentrifugalfelde vollkommen äquivalent ist. Ein solches Feld erhielten wir dann, wenn wir uns sämtliche im Außenraum befindliche Massen (Milchstraßensysteme usw.) rotierend denken und ihre Gravitationswirkung berechnen. Die Lösung für die retardierten Potentiale (Gl. (3)) setzt aber die Randbedingung $\lim \gamma_{\mu\nu} = 0$ für das räumlich Unendliche voraus. Wie nun Einstein in seiner kosmologischen Arbeit[1]) gezeigt hat, sind diese Randbedingungen angenähert erfüllt für ein Koordinatensystem, gegen das im Mittel die Fixsterne ruhen. Unsere Lösung (16) stellt demnach nicht das Feld einer „allein auf der Welt befindlichen" rotierenden Hohlkugel dar, sondern das Feld im Innern einer solchen Hohlkugel, außerhalb welcher sich in noch viel größerer Entfernung vom Ursprung Massen befinden, die im Mittel gegen das gewählte Bezugssystem ruhen. Das durch die Gl. (16) dargestellte Feld ist also beispielsweise jenes, das im Orte des Sonnenmittelpunktes bestünde, wenn statt der Sonne und aller Planeten eine große Hohlkugel, etwa vom Radius der Neptunbahn, vorhanden wäre, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen die Fixsterne rotiert. Befänden sich im Zentrum dieser Kugel auf einem Weltkörper, dessen eigenes Schwerefeld vernachlässigt werden kann und der mit der Winkelgeschwindigkeit ω' um dieselbe Achse rotiert, Beobachter, so würden sie Zentrifugal- und Corioliskräfte wahrnehmen, die sich aus der Wirkung ihrer eigenen Rotation und der Wirkung der rotierenden Hohlkugel zusammensetzen. Der Einfluß des Feldes der Hohlkugel auf das von der Eigenrotation herrührende Zentrifugalfeld soll im folgenden studiert werden.

Wir führen zu diesem Zwecke ein Koordinatensystem ein, das mit dem mit der Winkelgeschwindigkeit ω' rotierenden Bezugskörper fest verbunden ist. Das geschieht mittels der Transformation:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\omega'\frac{x_4}{i} + \sin\omega'\frac{x_4}{i}; \qquad z' = z, \\ y' &= -x\sin\omega'\frac{x_4}{i} + y\cos\omega'\frac{x_4}{i}; \quad x_4' = x_4. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Durch diese Transformation gehen die uns interessierenden Größen $g_{\mu 4}$ über in:

$$\left.\begin{aligned} g_{14}' &= -iy'\left[\omega'\left(1+\frac{2kM}{3a}\right)-\omega\frac{4kM}{3a}\right], \\ g_{24}' &= ix'\left[\omega'\left(1+\frac{2kM}{3a}\right)-\omega\frac{4kM}{3a}\right], \\ g_{44}' &= -1+\frac{2kM}{a}\left[1+\frac{5a^2\omega^2}{3}-\frac{\omega^2}{3}z^2\right]+ \\ &\quad +(x'^2+y'^2)\left\{\omega'^2\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\right. \\ &\quad \left.-\omega\omega'\frac{4kM}{3a}+\omega^2\frac{kM}{3a}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Bildet man aus diesen Größen gemäß (19) und (20) die Bewegungsgleichungen, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\left[\omega'\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\frac{4kM}{3a}\right]\dot{y}+ \\ &\quad +\left\{\omega'^2\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\omega'\frac{4kM}{3a}+\omega^2\frac{kM}{3a}\right\}x, \\ \ddot{y} &= -2\left[\omega'\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\frac{4kM}{3a}\right]\dot{x}+ \\ &\quad +\left\{\omega'^2\left(1+\frac{2kM}{a}\right)-\omega\omega'\frac{4kM}{3a}+\omega^2\frac{kM}{3a}\right\}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{2kM}{3a}\omega^2 z. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Setzt man hier $M = 0$, so erhält man das gewöhnliche Zentrifugal-Coriolisfeld:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega'\dot{y}+\omega'^2 x, \\ \ddot{y} &= -2\omega'\dot{x}+\omega'^2 y, \\ \ddot{z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

1) Berl. Ber. 1917, S. 142.

Setzt man $M \neq 0$, $\omega = 0$, so wird:

$$\ddot{x} = 2\omega'\left(1 + \frac{2kM}{a}\right)\dot{y} + \omega'^2\left(1 + \frac{2kM}{a}\right)x,$$

$$\ddot{y} = -2\omega'\left(1 + \frac{2kM}{a}\right)\dot{x} + \omega'^2\left(1 + \frac{2kM}{a}\right)y, \qquad (27)$$

$$\ddot{z} = 0,$$

woraus man ersehen kann, wie die Trägheitswirkungen durch die Anwesenheit der umgebenden Massen M beeinflußt werden. Zentrifugal- und Corioliskraft multiplizieren sich mit dem Faktor $\left(1 + \frac{2kM}{a}\right)$.

Aus den Gl. (25) selbst ersieht man schließlich, daß die Wirkung einer gleichsinnigen Rotation der Hohlkugel in einer Verkleinerung der Zentrifugal- und Corioliskraft besteht. Setzt man

$$\omega' = \omega \frac{4kM}{3(2kM + a)}, \qquad (28)$$

so verschwindet die Corioliskraft. Man könnte die Größe $\frac{4kM}{3(2kM + a)}$ als den Mitführungskoeffizienten der Hohlkugel in bezug auf die Corioliskraft bezeichnen. Die Zentrifugalkraft kann nicht zum Verschwinden gebracht werden, da die Ausdrücke in den geschlungenen Klammern Gl. (25) gleich Null gesetzt keine reellen Wurzeln für ω liefern. Im „ruhenden" Bezugssystem ($\omega' = 0$) war der Wert der Zentrifugalkraft

$$\frac{kM}{3a}\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Läßt man nun das Bezugssystem gleichsinnig mit der Hohlkugel mitrotieren, so wird zunächst für kleine Werte von ω' die Zentrifugalkraft abnehmen und erreicht ein Minimum, wenn $\frac{\omega'}{\omega}$ gleich dem halben Wert des „Mitführungskoeffizienten" geworden ist[1]). Von da ab wächst sie wieder und erreicht, sobald $\frac{\omega'}{\omega}$ gleich dem Mitführungskoeffizienten wird, wieder den ursprünglichen Wert, den sie für $\omega' = 0$ hatte. Mit wachsendem ω' steigt sie dann weiter und erreicht für große ω' einen Betrag, der sich von dem Werte, den sie ohne Anwesenheit der Hohlkugel hätte (nämlich $\omega'^2\sqrt{x^2 + y^2}$), nur wenig unterscheidet, da ja unseren Voraussetzungen gemäß $\frac{2kM}{a}$ klein gegen 1 ist.

Es scheint im ersten Augenblicke dem Wesen einer Relativitätstheorie zu widersprechen, daß die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen (25) nicht bloß von der Differenz $\omega - \omega'$ abhängen. Man darf aber nicht vergessen, daß wir es bei dem hier behandelten Problem nicht nur mit zwei Körpern: Massenpunkt und Hohlkugel zu tun haben, sondern daß vielmehr durch die Randbedingungen $\lim \gamma_{\mu\nu} = 0$ als drittes feldbestimmendes Element noch weiter entfernte Massen hineingebracht werden, welche gegenüber dem zuerst gewählten Bezugssysteme ruhen.

Zusammenfassung.

Es wird an einem konkreten Beispiel gezeigt, daß im (Einsteinschen) Gravitationsfelde ferner rotierender Massen Kräfte auftreten, die der Zentrifugal- bzw. Corioliskraft analog sind. Die dem gerechneten Spezialfalle anhaftenden Eigenheiten werden durchdiskutiert.

Wien, Dezember 1917, Institut für theoret. Physik der Universität.

(Eingegangen 21. Dezember 1917.)

Diffusion und Statistik.

Von Agnes Podjed.

Seit den Arbeiten von Einstein und Smoluchowski kennen wir den Zusammenhang zwischen Diffusion, Brownscher Bewegung und den Konzentrationsschwankungen in einer Lösung. Die scheinbar regellosen Konzentrationsänderungen sind gewissen statistisch abgeleiteten Gesetzen unterworfen und diese sind nur eine andere Form des bekannten Diffusionsgesetzes. In einer seiner letzten Abhandlungen[1]) findet Smoluchowski eine Relation für die Geschwindigkeit einer Konzentrationsänderung, die nicht nur vom physikalischen Standpunkte aus von Interesse zu sein scheint.

Es sei v ein abgegrenztes Flüssigkeitsvolumen und ν sei die durchschnittlich auf das Volumen v entfallende Teilchenzahl. In aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten betrachtet wird das Volumen v verschiedene, von ν abweichende Teilchenzahlen aufweisen. Eine bestimmte Teilchenzahl n wird im allgemeinen öfters vorkommen und von verschiedenen Zahlen m gefolgt werden. Das arithmetische Mittel aus allen Differenzen $m - n$ bei festgehaltenem n, wird als die mitt-

1) Davon kann man sich durch Differentiation der Klammergröße sofort überzeugen.

1) Sitzungsber. d. kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien. Mathem.-nat. Klasse; Bd. 123, Abt. IIa, Dezember 1914. — Eine kürzere Darstellung gibt v. Smoluchowski in seinen „Drei Vorträge über Diffusion usw.", diese Zeitschr. 17, 557, 1916, 1. Vortrag, § 5.

lere Änderung der Zahl n, Δ_n bezeichnet. Der Satz von Smoluchowski lautet:

$$\Delta_n = (\nu - n) P, \qquad (1)$$

wobei P ein Proportionalitätsfaktor ist. P wird gleich 1, wenn die Zeitabschnitte zwischen den einzelnen Zählungen so lang sind, daß die Zustände als voneinander unabhängig angesehen werden können.

Diese Formel zeigt deutlich die ausgleichende Wirkung der Diffusion und doch ist bei ihrer Herleitung die physikalische Seite des Vorganges gar nicht berücksichtigt worden. Sie ergab sich aus abzählenden, statistischen Betrachtungen über die stationäre Reihe der Konzentrationsschwankungen und vom statistischen Standpunkt aufgefaßt sagt sie aus, daß die mittlere Änderung einer bestimmten Zahl der Zahlenfolge der Abweichung dieser Zahl vom Mittel proportional ist.

Es wäre nun von Interesse zu ermitteln, ob das Diffusionsgesetz in dieser, von der Erscheinung, die man gewöhnlich Diffusion nennt, so ganz unabhängigen Form auch für eine beliebige natürliche statistische Zahlenreihe gilt, die sich nach der Gaußschen Verteilungsfunktion um einen Mittelwert ν gruppiert. Ich will meine Untersuchungen an einer Reihe anstellen, von der es im vornhinein bekannt ist, daß sie der genannten Bedingung genügt. Es ist dies das Geschlechtsverhältnis der Geborenen.

Die nachstehende Zahlenreihe ist der preußischen Statistik[1]) entnommen. Jede Zahl bedeutet die in der Rheinprovinz in den einzelnen Monaten auf 1000 Geburten entfallenden Mädchengeburten.

Tabelle I.

488, 474, 488, 491, 482, 490, 495, 497, 484, 483, 490, 485,
492, 485, 487, 484, 480, 490, 480, 486, 459, 490, 484, 484,
483, 479, 485, 492, 483, 488, 488, 484, 483, 480, 486, 484,
491, 490, 484, 492, 479, 487, 486, 486, 485, 489, 482, 486,
492, 490, 489, 484, 483, 482, 494, 482, 484, 485, 486, 489,
485, 483, 494, 492, 477, 482, 482, 487, 488, 485, 492, 484,
486, 480, 488, 491, 495, 493, 486, 485, 484, 483, 491, 493,
491, 486, 483, 486, 483, 479, 493, 482, 486, 492, 495, 488,
490, 494, 491, 487, 492, 488, 492, 488, 487, 487, 484, 490,
489, 490, 484, 493, 495, 490, 487, 484, 488, 488, 480, 495,
487, 498, 490, 490, 480, 488, 482, 480, 493, 495, 483, 482,
494, 493, 491, 488, 487, 483, 489, 485, 493, 487, 489, 491,
490, 485, 480, 493, 483, 486, 483, 478, 495, 487, 488, 488,
486, 489, 489, 480, 486, 488, 497, 480, 489, 493, 486, 486,
490, 489, 484, 485, 490, 490, 486, 484, 485, 491, 488, 492,
491, 488, 486, 487, 498, 483, 486, 489, 483, 489, 487, 486,
489, 492, 488, 490, 488, 490, 486, 490, 495, 483, 492, 492,
486, 487, 488, 487, 484, 484, 487, 486, 488, 483, 487, 486,
490, 491, 492, 489, 488, 492, 487, 484, 489, 484, 486, 483,
492, 485, 494, 491, 495, 484, 490, 489, 487, 482, 490, 492,
488, 486, 485, 487, 492, 490, 481, 490, 487, 493, 485, 483,
482, 485, 490, 490, 490, 483, 486, 487, 485, 485, 484, 487,
491, 486, 495, 491, 481, 489, 484, 489, 490, 481, 485, 483,
488, 493, 490, 496, 486, 490, 484, 493, 486, 480, 491, 489,
483, 488, 489, 487, 484, 487, 491, 487, 483, 481, 488, 480,
481, 481, 488, 484, 492, 485, 485, 483, 491, 487, 489, 480,
485, 484, 493, 484, 486, 490, 483, 491, 486, 482, 481, 490,
489, 487, 496, 490, 486, 485, 488, 486, 487, 484, 486, 480,
494, 489, 488, 487, 482, 479, 486, 494, 493, 487, 481, 488,
488, 491, 488, 486, 488, 488, 487, 489, 482, 494, 492, 486,
491, 494, 484, 485, 483, 490, 492, 486, 485, 487, 483, 488,
481, 493, 483, 486, 480, 479, 488, 484, 481, 489, 483, 489,
489, 484, 489, 480, 486, 480, 482, 487, 482, 485, 488, 487.

1) Jahrgang 1880—1912.

Greifen wir eine beliebige Zahl n der Tabelle I heraus, so wird sie im allgemeinen in der Tabelle noch öfter vorkommen, und zwar mit der durch die Verteilungsfunktion bestimmten Häufigkeit. Suchen wir diese bestimmte Zahl in der Tabelle I überall auf, und bilden wir die Differenz mit der nächstfolgenden. Das arithmetische Mittel dieser Differenzen nennen wir den mittleren Sprung der Zahl n. Dieser Ausdruck ist nun offenbar nach demselben Bildungsgesetz entstanden, wie im Falle der Konzentrationsschwankungen die Geschwindigkeit der Konzentrationsänderung. Wir wollen ihn deshalb, in Übereinstimmung mit früher, Δ_n nennen.

Um den mittleren Sprung am bequemsten zu berechnen, bedienen wir uns der Tabelle II. Sie hat zwei Eingänge, die beide durch die Zahlen der Tabelle I gebildet sind, und enthält die Häufigkeit mit der ein gewisses Zahlenpaar in der Tabelle I vorkommt. Es sei n eine Zahl des vertikalen Eingangs, m_h bezeichne jede Zahl des horizontalen Einganges, die auf n folgt, und $\psi(n)$ sei die empirisch festgestellte Häufigkeit der Zahl n, dann ist

$$\Delta_n = \frac{\sum_h (m_h - n)}{\psi(n)},$$

wobei m_h nur diejenigen Werte durchläuft, die der Zahl n in der Tabelle I wirklich folgen. Ich habe auf diese Weise das Δ_n für jede der Zahlen n gebildet. Die Resultate sind in der ersten Rubrik der Tabelle III ersichtlich. Durch Einsetzen der so gewonnenen Δ_n-Werte in die Smoluchowskische Formel (1), wobei aus Tabelle I $\nu = 487$ berechnet wurde, bekam ich eine Reihe von Werten für den Proportionalitätsfaktor P. Der Theorie nach sollte in unserem Falle wenn wir annehmen, daß die Mädchengeburten in den einzelnen Monaten unabhängig voneinander erfolgen, $P = 1$ sein, denn es ist dann:

$$\sum_h n = n\psi(n),$$

$$\sum_h \frac{m_h}{\psi(n)} = \nu.$$

Ich bekam als arithmetisches Mittel der verschiedenen, nur sehr wenig voneinander abweichenden empirisch berechneten P-Werte, die

Tabelle II.

	474	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498
474													1										
477							1																
478																				1			
479										1	1	1	1					1					
480				1		1	1			1	4		1	1	1	1		2	1	1			
481						1				1			3	2	3			1					
482				1	1	1	1		1	2	1	2		1	2				3				
483			1	2	1	1	3				5	1	4	3	2	3	2		1				
484					1	1		5	2	4	4	3	1	3	2	1	2	3					
485					1		1	5	3	2	1	3	2		2	1	3	1	1				
486					4		1	4	2	5	3	4	4	5	5	1	2		1	1			
487						1	3	3	7	1	4	1	3	3		2	2	1			1		2
488	1				2	1	1	1	3	1	5	6	5	1	3	3	3	1				1	
489					3	1	1	3	5	2	1	4	2	2	3		1	1					
490					2	2		2	4	2	3	2	1	5	4	1	2		1	2	1		
491						1	1				3	3	4	1	1		1	1	1	2			
492		1		1				1	1	3	4	1	4	1	2	1	1			1			
493							1	2	1	1	2	2			1	2				2			
494							1		1					1		2	2	2					
495								2	1			2	1		1	1	1					1	
496											1				1								
497				1					1														
498								1								1							

Tabelle III.

	474	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491
Δ_n emp. ber.	+14	+5	+17	+9	+7,7	+7,2	+4,6	+3,5	+2,8	+1,3	+0,7	+0,1	−0,9	−3,2	−2,5	−2,4

	492	493	494	495	496	497	498
Δ_n emp. ber.	−5,2	−5,5	−4,3	−6,8	−8	−15	−11,5

	474	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491
$\overline{\Delta}_n$ theoret. ber.	+0,9	+9	+8,1	+7,2	+6,3	+5,4	+4,5	+3,6	+2,7	+1,8	+0,9	0	−0,9	−1,8	−2,7	−3,6

	492	493	494	495	496	497	498
$\overline{\Delta}_n$ theoret. ber.	−4,5	−5,4	−6,3	−7,2	−8,1	−9	−9,9

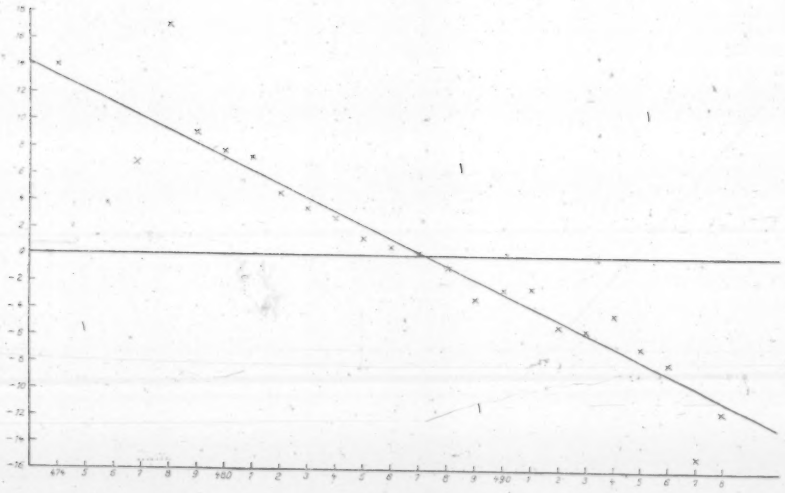


Fig. 1.

Zahl 0,9. Und nun konnte ich, nach Einsetzung dieses Proportionalitätsfaktors, die $\overline{\Delta}_n$ direkt aus der Smoluchowskischen Formel (1) theoretisch berechnen. Die zweite Rubrik der Tabelle III enthält die so gewonnenen $\overline{\Delta}_n$-Werte. Daß die Übereinstimmung der beiden Wertereihen nicht noch besser ist, muß man wohl dem verhältnismäßig geringen statistischen Material zuschreiben. Im Vorzeichen stimmt die Sache ganz genau, und ob Proportionalität wirklich stattfindet, können wir uns auf graphischem Wege am einfachsten überzeugen: Wenn wir unsere Ausgangszahlen als Abszissen, die dazugehörenden $\overline{\Delta}_n$ als Ordinaten auftragen, müßten, nach der Smoluchowskischen Formel, die Punkte auf einer Geraden liegen. In Fig. 1 sieht man, daß die Punkte eine Gerade approximieren.

Das ausgleichende Wirken der Diffusion tritt an diesem rein statistischen Vorgang deutlich hervor. Auf unwahrscheinliche, vom Mittel stark abweichende Werte folgt fast immer ein wahrscheinlicherer, dem Mittelwert näherer Wert. Das gibt dem Vorgang den Charakter der Einseitigkeit, Irreversibilität. Die Diffusion galt aber auch immer als Typus eines irreversiblen Vorganges, bis Boltzmanns Untersuchungen über die Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes und seine Beziehungen zur kinetischen Gastheorie auf die Sache ein neues Licht warfen. Es ist ja jetzt allgemein bekannt, daß die Diffusion nicht irreversibel ist, daß nur die Wahrscheinlichkeit eines so ausgezeichneten Zustandes, wie es meistens der Anfangszustand ist, verschwindend klein ist. Das von mir behandelte Beispiel ist eine gute Illustration für die Boltzmannsche Auffassung der Irreversibilität. In Tabelle IV habe ich zu jeder Zahl die Häufigkeit eingetragen, mit der ihr eine größere und eine kleinere Zahl als sie selbst folgt. Es ist ersichtlich, daß einer stark unter dem Mittel liegen-

Tabelle IV.

	474	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494
Häufigkeit der pos. Zuwachse	1	1	1	5	15	10	12	21	23	14	23	14	12	5	7	5	1	2	0

	495	496	497	498
Häufigkeit der pos. Zuwächse	1	0	0	0

	474	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494
Häufigkeit der neg. Zuwachse	0	0	0	0	1	0	3	8	7	10	16	19	21	22	23	14	20	12	9

	495	496	597	498
Häufigkeit der neg. Zuwachse	9	2	2	2

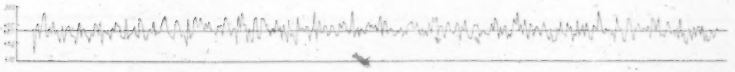


Fig. 2.

den Zahl unvergleichlich öfter eine größere, als eine kleinere Zahl folgt, und umgekehrt bei das Mittel überschreitenden Zahlen. Noch besser tritt die Reversibilität dieses Analogons der Diffusion an der Zickzack-Kurve (Fig. 2), die der Boltzmannschen H-Kurve entspricht[1]), hervor. Die einzelnen Monate sind als Abszissen, die Anzahl der Mädchengeburten in jedem Monat als Ordinaten aufgetragen. Von einer gewissen Höhe der Ordinaten an ist immer ein Abstieg zu vermerken, also scheinbare Irreversibilität, und doch wiederholen sich während längerer Zeitabschnitte immer wieder beträchtliche Abweichungen vom Mittel. Es erfolgt dann aber sofort eine Abnahme.

Dieser Zusammenhang zwischen Diffusion und den Schwankungen einer stationären, statistischen Zahlenreihe scheint also sichergestellt und wir sehen, daß die Diffusion eine Erscheinung ist, die nicht nur für den Physiker von großem Interesse ist, sondern auch im sozialen Leben eine bedeutende Rolle spielt.

1) Eine ähnliche Analogie zur Boltzmannschen H-Kurve findet sich bei P. u. T. Ehrenfest, diese Zeitschr. 8, 311, 1907.

(Eingegangen 14. Dezember 1917.)

Zur Theorie der Versuche von Kaufmann und Bucherer über β-Strahlen.

Von R. Malmström.

In einer früheren Arbeit[1]) wurde durch Kombination der Elementargesetze von Lorentz und Riemann eine Theorie aufgestellt, welche den scheinbaren Widerspruch zwischen den Versuchsresultaten von Fizeau und Michelson aufhebt. Die auf diese Weise aufgestellte Formel für die gegenseitige Wirkung zweier Elektronen steht aber nicht im Einklang mit den Versuchen über β-Strahlen. Für die x-Komponente der von dem Elektron e auf das Elektron e' ausgeübten Kraft erhielten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} e'F_x = &-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{ee'}{r}\left(1+\frac{u^2}{2c^2}\right)\right] \\ &+\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x'}\left[\frac{ee'}{r}\left(1+\frac{u^2}{2c^2}\right)\right] \\ &+\frac{ee'}{r}\frac{[a_r]\cos(r,x)-[a_x]}{c^2}, \end{aligned} \qquad (1)$$

wobei

$$u^2=(v_x'-v_x)^2+(v_y'-v_y)^2+(v_z'-v_z)^2,$$

und die Formel für ein mit dem Elektron e bewegliches Koordinatensystem gilt, oder ausgeführt

1) Diese Zeitschr. 18, 454, 1917.

$$
\begin{aligned}
e' F_x = {} & \frac{ee'}{r^2}\cos(r,x) \\
& \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{v'^2}{2c^2} - \frac{v_x' v_x + v_y' v_y + v_z' v_z}{c^2}\right] \\
& - \frac{ee'}{r^2}\frac{(v_x' - v_x)(v_r' - v_r)}{c^2} \qquad (2) \\
& + \frac{ee'}{r}\frac{a_x' - a_x}{c^2} + \frac{ee'}{r}\frac{[a_r]\cos(r,x) - [a_x]}{c^2}.
\end{aligned}
$$

Um die Theorie in Übereinstimmung zu bringen mit den Versuchsergebnissen über β-Strahlen, könnte man entweder so verfahren, daß man in der Formel (1) $1 + \frac{u^2}{2c^2}$ durch eine andere Funktion der Relativgeschwindigkeit, $\varphi\left(\frac{u^2}{c^2}\right)$ ersetzen würde, welche in erster Annäherung gleich $1 + \frac{u^2}{2c^2}$ wäre. Oder indem man in die Formel (2) zwei oder mehrere Funktionen von $\frac{u^2}{c^2}$ einführen würde. Man könnte z. B. in Analogie mit den Formeln von W. Ritz[1]) schreiben

$$
\begin{aligned}
e' F_x = {} & \frac{ee'}{r^2}\varphi\left(\frac{u^2}{c^2}\right)\cos(r,x) \\
& - \frac{ee'}{r^2}\frac{(v_x' - v_x)(v_r - v_r)}{c^2}\psi\left(\frac{u^2}{c^2}\right) \qquad (3) \\
& + \frac{ee'}{r}\frac{a_x' - a_x}{c^2} + \frac{ee'}{r}\frac{[a_r]\cos(r,x) - [a_x]}{c^2}.
\end{aligned}
$$

In dem dritten Gliede könnte dann noch a_x' fortgelassen werden und, wenn nötig, das Glied noch mit einer Funktion $\chi\left(\frac{u^2}{c^2}\right)$ multipliziert werden. Das erstere ist, wenn durchführbar, aus mehreren Gründen vorzuziehen.

Bei meinen bis jetzt erfolglosen Versuchen, solche Funktionen der Relativgeschwindigkeit aufzustellen, welche sowohl die Versuche von Bucherer als die von Kaufmann richtig wiedergeben, habe ich gefunden, daß man durch eine kleine Veränderung des Riemannschen Elementargesetzes, wobei allerdings die absoluten Geschwindigkeiten eingeführt werden und das Hamiltonsche Prinzip aufgegeben wird, zu Formeln gelangen kann, welche auf die genannten Versuche angewandt, denselben Wert für $\frac{e}{m}$ geben wie die Lorentzschen, und zwar ohne daß man eine von der Geschwindigkeit abhängige und sich deformierende Masse, sowie die Unmöglichkeit einer Geschwindigkeit größer als Lichtgeschwindigkeit anzunehmen braucht. Hierüber möchte ich eine kurze Mitteilung machen.

Wenn wir in der Formel (2) den Ausdruck

$$
\frac{ee'}{r^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2 + v'^2}{c^2}\right)
$$

mit

$$
\frac{e\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \cdot e'\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}{r^2}
$$

ersetzen, wobei v und v' jetzt die absoluten Geschwindigkeiten bedeuten sollen, so sind die Ausdrücke bis auf Glieder zweiter Ordnung in $\frac{v}{c}$ gleich. Nach dem neuen Gesetz hängt also bei kleinen Absolutgeschwindigkeiten die gegenseitige Wirkung zweier Elektronen bis auf Glieder zweiter Ordnung nur von ihrer Relativgeschwindigkeit ab und das negative Resultat des Versuchs von Trouton und Noble wird bestätigt[1]).

Denken wir uns jetzt, daß die Elektronen sich mit den Geschwindigkeiten v und v' relativ zu einem Koordinatensystem bewegen, welches wiederum die absolute Geschwindigkeit (= Erdgeschwindigkeit) w hat, so wird, falls die Beschleunigungen verschwinden, die x-Komponente der Kraft

$$
\begin{aligned}
e' F_x = {} & \frac{ee'}{r^2}\cos(r,x)\left[\sqrt{1 + \frac{v'^2 + w^2 + 2v'w\cos(v',w)}{c^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{v^2 + w^2 + 2vw\cos(v,w)}{c^2}}\right. \\
& \left. - \frac{(v_x' + w_x)(v_x + w_x) + (v_y' + w_y)(v_y + w_y) + (v_z' + w_z)(v_z + w_z)}{c^2}\right] - \frac{ee'}{r^2}\frac{(v_x' - v_x)(v_r' - v_r)}{c^2}.
\end{aligned}
$$

Wenn bei den Versuchen über β-Strahlen e ein Leitungselektron ist, so ist tatsächlich

$$
a_x,\ a_y,\ a_z,\ a_r = 0.
$$

Wenn man das Glied mit a_x' beibehält, so wird es mit der Ablenkung multipliziert und das ganze ist, da wir mit kleinen Ablenkungen rechnen werden, von zweiter Ordnung und kann vernachlässigt werden.

Da $\frac{w}{c} = \frac{1}{10000}$ und $\frac{v}{c}$ noch viel kleiner ist, können wir die Ausdrücke nach Potenzen von

1) W. Ritz, Ges. Werke, S. 380.

1) Ob man jetzt, da die Absolutgeschwindigkeiten eingeführt sind, eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die von der Lage und der absoluten Geschwindigkeit abhängigen Kraftwirkungen annehmen und hiermit ein anschauliches Bild, ähnlich z. B. demjenigen von J. J. Thomson in „Elektrizität und Materie" verbinden könnte, bleibe dahingestellt. Für den jetzigen Zweck ist es nicht nötig.

$\frac{w_x}{c}$, $\frac{v_x}{c}$ usw. entwickeln und nur die Glieder erster Ordnung beibehalten. Die Glieder zweiter Ordnung von dem zweiten Gliede in Klammern werden außerdem, als von v' unabhängig, durch die Wirkung einer Kompensationsladung aufgehoben. Es wird dann der Klammerausdruck

$$\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}+\frac{v'w\cos(v',w)}{c^2\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}-\frac{v_x'v_x+v_y'v_y+v_z'v_z+v_x'w_x+v_y'w_y+v_z'w_z}{c^2}$$
$$=\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}-\frac{v_x'v_x+v_y'v_y+v_z'v_z}{c^2}$$
$$-\frac{v'w\cos(v',w)}{c^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}}\right).$$

Bei der Berechnung der Wirkung eines Stromes auf das Elektron e' fallen das erste und dritte Glied fort, da die Ladung des Stromleiters $=0$ ist. Umgekehrt fällt das mittlere Glied fort, wenn es sich um die Wirkung eines relativ zum Koordinatensystem ruhenden Elektrons e handelt, und nur das erste und dritte Glied bleiben stehen. Das dritte Glied ist, wenn $w=$ Erdgeschwindigkeit, von der Größenordnung 0,0001 und steht immer neben

$$\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}.$$

Da eine so große Genauigkeit bei Messungen über Radiumstrahlen nicht erreicht worden ist, können wir auch dieses Glied vernachlässigen. Übrigens werden Vernachlässigungen derselben Größenordnung bei der Theorie von Lorentz gemacht. Wir erhalten so für die x-Komponente der Kraftwirkung

$$e'F_x=\frac{ee'}{r^2}\left[\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}-\frac{v_x'v_x+v_y'v_y+v_z'v_z}{c^2}\right]\cos(r,x)$$
$$-\frac{ee'}{r^2}\frac{(v_x'-v_x)(v_r'-v_r)}{c^2}. \qquad (4)$$

Bei den Versuchen von Kaufmann und Bucherer bewegt sich das Elektron in homogenen magnetischen und elektrischen Feldern. Ein homogenes magnetisches Feld erhalten wir, in dem wir uns eine unendliche Ebene (XY) von Flächenströmen konstanter Dichte und Richtung (Y) durchflossen denken. Es wird dann $v_x=v_z=0$. Bezeichnen wir die Flächendichte der Leitungselektronen mit ϱ, ihre Geschwindigkeiten mit v_{y1} und v_{y2}, so ist die Flächendichte des Stromes

$$i_y=\varrho\,(v_{y1}-v_{y2}).$$

Wir haben dann in obigen Formeln e durch $\varrho\,dx\,dy$ bzw. $-\varrho\,dx\,dy$, v_y durch bzw. v_{y1} und v_{y2} zu ersetzen und über die xy-Ebene zu integrieren. Das Resultat wird, wenn noch elektromagnetische Einheiten eingeführt werden,

$$\begin{aligned} e'F_x&=0,\\ e'F_y&=e'v_z'\,2\pi i_y=e'v_z'H_x,\\ e'F_z&=-e'v_y'\,2\pi i_y=-e'v_y'H_x. \end{aligned} \qquad (5)$$

Wenn die XY-Ebene mit positiver Elektrizität von konstanter Dichte belegt ist, so entsteht ein homogenes elektrisches Feld mit der Feldstärke E_z und die auf das Elektron wirkenden Kräfte werden

$$\begin{aligned} e'F_x&=-\frac{e'v_x'v_z'}{c^2}E_z,\\ e'F_y&=-\frac{e'v_y'v_z'}{c^2}E_z,\\ e'F_z&=-\frac{e'v_z'^2}{c^2}E_z+e'E_z\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Ist wieder die YZ-Ebene belegt, so hat das Feld die Richtung der X-Achse und die Kraftkomponenten werden

$$\begin{aligned} e'F_x&=e'E_x\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}-e'E_x\frac{v_x'^2}{c^2},\\ e'F_y&=-e'E_x\frac{v_x'v_y'}{c^2},\\ e'F_z&=-e'E_x\frac{v_x'v_z'}{c^2}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Bei den Versuchen von Bucherer ist das magnetische Feld senkrecht zum elektrischen. Wir erhalten die Kraftkomponenten durch Addition der Formeln (5) und (6). Die Elektronen bewegen sich auswärts von der Mitte eines kreisförmigen Kondensators (XY-Ebene). Nur diejenigen können heraustreten, deren Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu den Kondensatorplatten (z-Richtung) gleich Null ist. Aus den Ausdrücken von F_z in (5) und (6) geht hervor, daß v_z' gleich Null bleibt, wenn es von Anfang gleich Null war und

$$v_y'H_x=E_z\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}}.$$

Da die X- und Y-Komponenten der Kraft v_z' enthalten, so bleiben auch diese gleich Null und das Elektron bewegt sich geradlinig.

Wird der Winkel zwischen x-Achse und Geschwindigkeitsrichtung mit α bezeichnet und $\frac{v'}{c}=\beta'$ gesetzt, so erhält man

$$E_z\sqrt{1+\beta'^2}=cH_x\beta'\sin\alpha. \qquad (8)$$

Nach Lorentz hätten wir, wenn wir für diesen Fall $\frac{v'}{c}$ mit β bezeichnen,

$$E_z = cH_x\beta \sin\alpha . \qquad (9)$$

Führen wir diesen Wert in (8) hinein, so finden wir

$$\beta = \frac{\beta'}{\sqrt{1+\beta'^2}}$$

oder

$$\beta' = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} . \qquad (10)$$

Da nach Lorentz β nicht größer als 1 werden kann, können nach (9) nur diejenigen Elektronen heraustreten, für welche

$$\sin\alpha \geq \frac{E_z}{H_x \cdot c} .$$

Nach der Formel (10) wird für diesen Winkel $\beta' = \infty$, woraus folgt, daß auch hier nur diejenigen Elektronen heraustreten können für die $\sin\alpha \geq \frac{E_z}{H_x c}$.

Wenn die Elektronen herausgetreten sind, wirkt nur das magnetische Feld. Bucherer hat nur für den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die Ablenkung beobachtet. Nach (5) erhalten wir die Ablenkung durch Integration der Formel

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -e'v_y'H_x$$

oder angenähert mit Einführung der Zentrifugalkraft

$$\frac{mv_y'^2}{r} = e'v_y'H_x ,$$

woraus

$$\frac{e'}{m} = \frac{v_y'}{rH_x} = \frac{\beta' c}{rH_x} , \qquad (11)$$

da für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $v_y' = v'$ ist.

Nach Lorentz hätte man

$$\frac{e}{m} = \frac{c\beta}{rH_x}$$

und hier muß

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

eingeführt werden, also

$$\frac{e}{m_0} = \frac{1}{rH_x}\frac{c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Führen wir in unsere Formel (11) den Wert für β' aus (10) ein, so erhalten wir dieselbe Formel und beide geben somit denselben Wert für $\frac{e}{m}$.

Bei den Versuchen von Kaufmann sind die beiden Felder gleichgerichtet (X-Achse). Die Elektronen werden senkrecht zur Feldrichtung herausgeschleudert. Wählen wir hierzu die Z-Richtung, so können wir mit genügender Annäherung Produkte und Quadrate von v_x' und v_y' vernachlässigen und $v_z' = v' =$ konst. setzen. Durch Kombination der Gleichungen (5) und (7) erhält man für die Bestimmung der Ablenkungen

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = e'E_x\sqrt{1+\frac{v'^2}{c^2}} = e'E_x\sqrt{1+\beta'^2} ,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = e'H_xv_z' \qquad = e'cH_x\beta' ,$$

oder da

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dz^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{d^2x}{dz^2}c^2\beta'^2 ,$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{e'}{m}\frac{E_x}{c^2}\frac{\sqrt{1+\beta'^2}}{\beta'^2} ,$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{e'}{m}\frac{H_x}{c}\frac{1}{\beta'} .$$

Mit den bei dem Versuch herrschenden Bedingungen erhält man, wenn a und b zwei Apparatkonstante bedeuten,

$$x = a\frac{e'}{m}\frac{\sqrt{1+\beta'^2}}{\beta'^2} ,$$

$$y = b\frac{e'}{m}\frac{1}{\beta'} . \qquad (12)$$

Nach Lorentz hätten wir erhalten

$$x = a\frac{e}{m}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2} ,$$

$$y = b\frac{e}{m}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} . \qquad (13)$$

Durch Division der beiden Formeln (13) erhalten wir eine Formel zur Berechnung von β, die unabhängig ist von jeder Annahme über die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit[1]). Diese lautet:

$$\beta = \frac{y}{x}\frac{a}{b} .$$

Die Formeln (12) geben wieder

$$\frac{\beta'}{\sqrt{1+\beta'^2}} = \frac{ya}{xb}$$

und es wird wieder

1) Hierauf hat Planck aufmerksam gemacht, diese Zeitschr. 7, 753, 1906.

$$\beta' = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Führt man diesen Wert in die Formeln (12) ein, so ergeben sich zur Berechnung von $\frac{c'}{m}$ dieselben Formeln wie (13).

(Eingegangen 30. November 1917.)

Über die mathematische Auswertung der Debye-Scherrerschen Röntgen-Spektrogramme[1].

Von A. Johnsen und O. Toeplitz.

§ 1. Vergleich der Debye-Scherrerschen Spektrogrammetrie mit der Braggschen Spektrometrie.

Wie das Braggsche und das Debye-Scherrersche Verfahren zur Auffindung der Kristallstrukturen beide von demselben Laueschen Standpunkte ausgehen, so haben sie auch in ihrem Verlauf gewisse gemeinsame Wege und Stationen.

Beide Methoden finden zunächst anstatt des regelmäßigen Punktsystems Ω der Atomzentren oder Atome des Kristalls nur ein einziges Punktgitter Γ'; dieses ist obendrein in beiden Fällen meist nicht identisch mit den einander kongruenten q-Atomgittern Γ, welche parallel ineinandergestellt, das Punktsystem Ω bilden. Die Beziehungen zwischen Γ' und Γ werden klarer erscheinen, wenn wir zuvor die Ermittlung von Γ' verfolgt haben.

Braggs messen an natürlichen oder orientiert angeschliffenen Kristallflächen $(h_1\, h_2\, h_3)$ die Glanzwinkel $\frac{\vartheta}{2}$ der Interferenzmaxima, deren Gangunterschiede gleich einer ganzen Zahl n von Wellenlängen λ sind. Die Formel

$$d = \frac{n\lambda}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} \qquad (I)$$

liefert sodann die primitiven Abstände d der Scharen oder Stellungen eines und desselben Gitters Γ'. Hierbei bringt das Unbekanntsein der Größen n eine Unsicherheit mit sich, die jedoch in den folgenden Stadien beseitigt wird.

Ergeben drei nicht einer Zone oder einem Büschel angehörende Flächen f_1, f_2, f_3 die Werte $d_{a'}$, $d_{b'}$, $d_{c'}$, und bilden diese Flächen miteinander die Außenwinkel A', B', C' und die Kantenwinkel α', β', γ', so konstruiert man ein Parallelepiped Π', dessen Flächen die Abstände $d_{a'}$, $d_{b'}$, $d_{c'}$, die Außenwinkel A' B' C' und die Kantenwinkel α', β', γ' besitzen. Seine Kantenlängen a' b' c' folgen aus

$$\left.\begin{aligned} a' &= d_{a'}\sin\alpha'\, \Delta'^{-1/2} \\ b' &= d_{b'}\sin\beta'\, \Delta'^{-1/2} \\ c' &= d_{c'}\sin\gamma'\, \Delta'^{-1/2} \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

wo Δ' gleich dem Quadrat des Staudtschen Eckensinus, also eine Funktion von α', β', γ' ist. Somit ergibt sich das Volumen V' des Parallelepipeds Π' aus

$$V' = a'\, b'\, c'\, \Delta'^{1/2}. \qquad (III)$$

Nun kennt man aber das absolute Molekularvolumen bzw. (bei chemischen Elementen) Atomvolumen v der Kristallart in cm³ aus

$$v = \frac{M}{N\varrho}, \qquad (IV)$$

wo M das relative Molekulargewicht (Molgewicht) bzw. Atomgewicht, ϱ die Dichte und $N = 6{,}06 \times 10^{23}$ die Plancksche Konstante ist. Der Quotient $\frac{V'}{v}$ bedeutet hiernach die Anzahl der Molekeln bzw. (bei chemischen Elementen) Atome, welche von dem Parallelepiped Π' absorbiert werden. Das mittels Π' konstruierte Gitter ist dasjenige, welches eingangs mit Γ' bezeichnet wurde, und zwar sind in dem betr. Kristall $q' = \frac{rV'}{v}$ Gitter Γ' parallel ineinandergestellt, wenn die obige Molekel durch r Atome definiert wurde (bei chemischen Elementen ist also $r = 1$ zu setzen). Nunmehr bildet man den Strukturfaktor (Interferenzfaktor) $|S|^2$ derart, daß derselbe mit den geschätzten oder photometrierten Intensitäten der Interferenzmaxima im Einklang steht; dann ergibt dieser die Art der Ineinanderstellung der q' Gitter Γ', also die Verschiebungsvektoren $\mathfrak{t}_{2'}, \mathfrak{t}_{3'} \ldots \mathfrak{t}_{q'}$, durch welche irgendeines jener q' Gitter Γ' in die übrigen $q'-1$ Gitter Γ' des Punktsystems Ω übergeführt wird. Jetzt können aus Π', Γ', q' und $\mathfrak{t}_{2'}, \mathfrak{t}_{3'}, \ldots \mathfrak{t}_{q'}$ die anfangs erwähnten q Atomgitter Γ abgeleitet werden, wenn man dieselben so definiert: Jedes Gitter Γ besteht ausschließlich aus Atomen eines und desselben chemischen Elements, im übrigen sind alle Gitter Γ einander kongruent und

[1] Der Inhalt von § 2 und 3 ungefähr und von § 5 teilweise wurde im Juli 1917 Herrn Debye brieflich mitgeteilt; Debye bezieht sich darauf in dieser Zeitschr. 18, 485, 1917, Anm. Durch äußere Umstände waren die Verf. verhindert, ihre Untersuchung schon damals zu veröffentlichen. Inzwischen hat C. Runge (diese Zeitschr. 18, 509, 1917) eine Lösung der Aufgabe publiziert. Immerhin scheint unsere Methode, die von der Rungeschen durchaus verschieden und in § 5 mit dieser verglichen ist, nicht überflüssig zu sein; § 4 ist erst nach Kenntnisnahme der Rungeschen Arbeit abgefaßt.

parallel und q ist die kleinste Anzahl solcher Gitter Γ, aus denen man das Punktsystem Ω des Kristalls aufbauen kann. Hierbei findet man q Gitter Γ' mit einem primitiven Parallelepiped Π und den Verschiebungsvektoren t_2, t_3, ... t_q. Sind a, b, c die Kantenlängen und α, β, γ bzw. A, B, C die Winkel von Π, so heißen a, b, c, t_2, t_3, ... t_q und α, β, γ (bzw. A, B, C) die Strukturkonstanten des Kristalls; ihre Anzahl beträgt demnach $6 + (q - 1)$ oder wenn man jeden Vektor t in seine drei Komponenten parallel a, b, c auflöst, $6 + 3(q - 1)$.

Über die Beziehungen zwischen den Gittern Γ' und Γ ist schließlich noch folgendes zu sagen. Offenbar liefert ein Kristall verschiedene Gitterarten Γ', je nach der strukturellen Bedeutung der Flächen f_1, f_2, f_3, aus deren Glanzwinkeln die Gitterart Γ' abgeleitet wird. Bringt man die drei Flächen irgendeines primitiven Parallelepipedons Π der Gitterart Γ zur Reflexion, so ist das aus den Werten $\frac{\vartheta}{2}$ direkt folgende Gitter Γ' identisch mit dem Atomgitter Γ und somit auch $q' = q$. In allen andern Fällen dagegen wird entweder $q' > q$ oder $q' < q$. Wenn $q' > q$ ist, dann fungieren $\frac{q'}{q}$ Gitter Γ' als sogenannte Teilgitter von Γ, während bei $q' < q$ umgekehrt Γ ein Teilgitter von Γ' ist. Bestimmt man z. B. an einem Kristall von Kupfer, dessen Punktsystem Ω nach Braggs aus einem einzigen flächenzentrierten Würfelgitter Γ besteht, die Interferenzmaxima der Scharen (100), (010), (001), so erhält man zunächst ein einfaches Würfelgitter Γ', dessen primitiver Würfel $^1/_8$ so groß ist als der flächenzentrierte Würfel des Atomgitters Γ; mithin wird $q' = {}^1/_2$, während $q = 1$, d. h. Γ repräsentiert ein Teilgitter von Γ' derart, daß zur Konstruktion von Γ' zwei Gitter Γ vorhanden sein müßten.

Ermittelt man dagegen die Glanzwinkel der Scharen (111), (113), (133), so erhält man ein einfaches Würfelgitter Γ', dessen primitiver Würfel Π' viermal so groß ist als das primitive Parallelepiped Π des Kupfergitters Γ; somit wird $q' = 4$, während $q = 1$ ist, d. h. Γ' ist ein Teilgitter von Γ derart, daß man mit vier solchen Gittern Γ' ein Kupferatomgitter Γ aufbauen kann.

Wie die Braggsche, so gelangt auch die Debye-Scherrersche Methode zunächst zu Gittern Γ', welche die soeben berührten Beziehungen zu Γ der Kristallart erkennen lassen. Jedoch sind hierbei die geometrischen Kristallkonstanten sowie die Indizes der reflektierenden Scharen $(h_1\ h_2\ h_3)$ unbekannt. Daher bildet den Ausgangspunkt der Berechnungen bei diesem Verfahren nicht (I), sondern die quadratische Form[1])

$$4\sin^2\frac{\vartheta}{2} = k_{11}h_1'^2 + k_{22}h_2'^2 + k_{33}h_3'^2 + 2k_{23}h_2'h_3' + 2k_{31}h_3'h_1' + 2k_{12}h_1'h_2', \qquad (V)$$

welche nach Laues[2]) Darstellung die gesamte Optik der Kristallgitter zu beherrschen scheint.

Die Winkel $\frac{\vartheta}{2}$ werden auf dem Spektrogramm ausgemessen, und zwar enthält dieses die Glanzwinkel aller derjenigen Ordnungen n und Scharen $(h_1\ h_2\ h_3)$, für welche $\frac{n\lambda}{2d} \leq 1$ ist. Zu bestimmen sind aus (V) die Koeffizienten k der Kristallart und die ganzen Zahlen $h_1' = nh_1$, $h_2' = nh_2$, $h_3' = nh_3$ jeder reflektierenden Schar $(h_1\ h_2\ h_3)$.

Während die Auflösung von (V) oder einer ähnlichen Form den Inhalt der folgenden Paragraphen bildet, haben wir jetzt die formale Beziehung zwischen (V) und (I) aufzudecken. Aus (I) folgt

$$4\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{n^2\lambda^2}{d^2}. \qquad (VI)$$

Der reflektierenden Schar $(h_1\ h_2\ h_3)$ primitiver Abstand d sei gleich d', wo

$$d' = \frac{V'}{F'}; \qquad (VII)$$

hierin ist V' wieder das Volumen des Parallelepipeds Π', welches mit den Abständen d_a, d_b, d_c dreier reflektierender Scharen und deren Winkeln A' B' C' bzw. α' β' γ' (vgl. oben) gebildet ist; F' sei der Inhalt der primitiven Parallelogramme, die das durch Π' bestimmte Gitter Γ' in den Ebenen $(h_1\ h_2\ h_3)$ erzeugt.

Bezeichnen wir die Flächeninhalte von Π' mit F_1', F_2', F_3', so wird

$$F'^2 = F_1'^2h_1^2 + F_2'^2h_2^2 + F_3'^2h_3^2 + 2F_2'F_3'h_2h_3\cos A' + 2F_3'F_1'h_3h_1\cos B' + 2F_1'F_2'h_1h_2\cos C', \qquad (VIII)$$

und (VI) geht infolge von (VII) und (VIII) über in

$$4\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda^2F_1'^2}{V'^2}n^2h_1^2 + \frac{\lambda^2F_2'^2}{V'^2}n_2h_2^2 + \frac{\lambda^2F_3'^2}{V'^2}n^2h_3^2 + \frac{2\lambda^2F_2'F_3'\cos A'}{V'^2}n^2h_2h_3 + \frac{2\lambda^2F_3'F_1'\cos B'}{V'^2}n^2h_3h_1 + \frac{2\lambda^2F_1'F_2'\cos C'}{V'^2}n^2h_1h_2 \qquad (IX)$$

1) P. Debye und P. Scherrer, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen, Sitzung vom 23. Dezember 1916.

2) M. v. Laue, Enzykl. math. Wiss. V. 3, 359, 1915.

oder

$$4\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda^2}{d_{a'}^2}(nh_1)^2 + \frac{\lambda^2}{d_{b'}^2}(nh_2)^2 + \frac{\lambda^2}{d_{c'}^2}(nh_3)^2 + \frac{2\lambda^2\cos A'}{d_{b'}d_{c'}}(nh_2)(nh_3) + \frac{2\lambda^2\cos B'}{d_{c'}d_{a'}}(nh_3)(nh_1) + \frac{2\lambda^2\cos C'}{d_{a'}d_{b'}}(nh_1)(nh_2)\,. \qquad (X)$$

Setzt man in (X)

$$nh_1 = h_1',\ nh_2 = h_2',\ nh_3 = h_3', \qquad (XI)$$

sowie

$$\frac{\lambda^2\cos A'}{d_{b'}d_{c'}} = k_{23},\ \frac{\lambda^2\cos B'}{d_{c'}d_{a'}} = k_{31},\ \frac{\lambda^2\cos C'}{d_{a'}d_{b'}} = k_{12},$$
$$\frac{\lambda^2}{d_{a'}^2} = k_{11},\ \frac{\lambda^2}{d_{b'}^2} = k_{22},\ \frac{\lambda^2}{d_{c'}^2} = k_{33}, \qquad (XII)$$

so resultiert die quadratische Form (V).

Nachdem (XI) und (XII) die Bedeutung der drei Indizes und der sechs Koeffizienten von (V) deutlich gemacht haben, können wir aus diesen neun Größen die 6 Gitterkonstanten a', b', c' nebst A', B', C' bzw. α', β', γ' von I'' herleiten.

Aus (II) ergibt sich nämlich, wenn man α', β', γ' als Funktionen von A', B', C' ausdrückt,

$$a'^2 = d_{a'}^2 \cdot \frac{1-\cos^2 A'}{1-\cos^2 A'-\cos^2 B'-\cos^2 C'+2\cos A'\cos B'\cos C'},$$
$$b'^2 = d_{b'}^2 \cdot \frac{1-\cos^2 B'}{1-\cos^2 A'-\cos^2 B'-\cos^2 C'+2\cos A'\cos B'\cos C'}, \qquad (XIII)$$
$$c'^2 = d_{c'}^2 \cdot \frac{1-\cos^2 C'}{1-\cos^2 A'-\cos^2 B'-\cos^2 C'+2\cos A'\cos B'\cos C'}$$

Ersetzt man in (XIII) $d_{a'}^2$, $d_{b'}^2$, $d_{c'}^2$, und $\cos^2 A'$, $\cos^2 B'$, $\cos^2 C'$ durch die aus (XII) fließenden Ausdrücke und schreibt zur Abkürzung

$$k_{11}k_{22}k_{33} - k_{11}k_{23}^2 - k_{22}k_{31}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{23}k_{31}k_{12} = K, \qquad (XIV)$$

so entsteht die zur Ermittelung von a', b' c' dienliche Gleichung

$$\left.\begin{aligned} a'^2 &= \lambda^2(k_{22}k_{33} - k_{23}^2)K^{-1} \\ b'^2 &= \lambda^2(k_{33}k_{11} - k_{31}^2)K^{-1} \\ c'^2 &= \lambda^2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)K^{-1} \end{aligned}\right\}, \qquad (XV)$$

während wir zur Berechnung von A', B', C' die folgenden Beziehungen direkt aus (XII) entnehmen:

$$\left.\begin{aligned} \cos A' &= k_{23}(k_{22}k_{33})^{-1/2} \\ \cos B' &= k_{31}(k_{33}k_{11})^{-1/2} \\ \cos C' &= k_{12}(k_{11}k_{22})^{-1/2} \end{aligned}\right\}, \qquad (XVI)$$

und somit wird

$$\begin{aligned} \cos\alpha' &= (k_{31}k_{12} - k_{23}k_{11})(k_{33}k_{11} - k_{31}^2)^{-1/2}(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)^{-1/2} \\ \cos\beta' &= (k_{12}k_{23} - k_{31}k_{22})(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)^{-1/2}(k_{22}k_{33} - k_{23}^2)^{-1/2} \\ \cos\gamma' &= (k_{23}k_{31} - k_{12}k_{33})(k_{22}k_{33} - k_{23}^2)^{-1/2}(k_{33}k_{11} - k_{31}^2)^{-1/2}. \end{aligned} \qquad (XVII)$$

Aus den Herleitungen (VI) bis (XVII) ist zu ersehen, daß auch die Auflösung der Debye-Scherrerschen quadratischen Form und die dann folgende Berechnung der Gitterkonstanten im allgemeinen nicht zu den Gittern I' mit den Konstanten a, b, c und α, β, γ bzw. A, B, C führt, sondern zu Gittern I'' mit a', b', c' und α', β', γ' bzw. A', B', C', wobei wieder die oben vermerkten Beziehungen zwischen I'' und dem daraus abzuleitenden I' bestehen.

Die Bedeutung der drei Indizes und der sechs Koeffizienten von (V) gestattet nunmehr ohne weiteres die Spezialisierung der Form (V) des triklinen Kristallsystems für die sechs übrigen höher symmetrischen Systeme und da von den verschiedenen Gitterarten eines Kristallsystems stets eine als Teilgitter der andern betrachtet werden kann, so genügt für jedes System die Aufstellung einer einzigen quadratischen Form. Man findet

Monoklin: $k_{11}h_1'^2 + k_{22}h_2'^2 + k_{33}h_3'^2 + 2k_{31}h_3'h_1'$ (gerade rhomboidische Säulen) (Va)

Rhombisch: $k_{11}h_1'^2 + k_{22}h_2'^2 + k_{33}h_3'^2$ (Quader) (Vb)

Tetragonal: $k_{11}(h_1'^2 + h_2'^2) + k_{33}h_3'^2$ (quadratische Säulen) (Vc)

Rhomboedrisch: $k_{11}(h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2) + 2k_{23}(h_2'h_3' + h_3'h_1' + h_1'h_2')$ (Rhomboeder) (Vd)

Hexagonal: $k_{11}(h_1'^2 + h_2'^2 - h_1'h_2') + k_{33}h_3'^2$ (sechsseitige Säulen mit zentrierter Basis) (Ve)

Regulär: $k_{11}(h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2)$ (Würfel) (Vf)

Das Debye-Scherrersche Verfahren leistet offenbar genau das, was das Braggsche voraussetzt, indem es die Indizes von Scharen sowie die Koeffizienten der quadratischen Form des Kristallsystems und somit letzteres selbst ergibt. Naturgemäß können die unvermeidlichen Messungsfehler der Werte $\frac{\vartheta}{2}$ bei pseudosymmetrischen Kristallarten zu einem Kristallsystem führen, das höher symmetrisch als das wirkliche erscheint; ebenso kann aber auch das von Braggs vorausgesetzte System infolge der reflexions-

goniometrischen Fehler unrichtig sein. Was die Symmetrieklasse der Kristallart betrifft, so ergibt sowohl die Spektrometrie als auch die Spektrogrammetrie die Möglichkeit genau so vieler Symmetrieklassen des Kristallsystems als die ermittelte Atomanordnung Raumgruppen zuläßt.

Eine eigentümliche Unsicherheit, die aber praktisch sehr selten ins Gewicht fallen wird, haftet der Debye-Scherrerschen Untersuchungsweise in den fünf rhomboedrischen Symmetrieklassen bei rhomboedrischem Gitter an; sie vermag hier die Orientierung des gefundenen Gitters Γ gegenüber dem kristallographischen Achsenkreuz nicht eindeutig, sondern nur zweideutig anzugeben.

Tabelle I.

$(h_1' h_2' h_3')$	$\vartheta/2$ gemessen	$\vartheta/2$ berechnet	Differenz
Kalkspat			
(200)	$5^0\ 21'$	$5^0\ 28'$	$-7'$
(111)	$5^0\ 46'$	$5^0\ 48'$	$-2'$
(220)	$6^0\ 36'$	$6^0\ 41'$	$-5'$
(220)	$8^0\ 42'$	$8^0\ 40'$	$+2'$
(422)	$11^0\ 39'$	$11^0\ 38'$	$+1'$
Graphit			
(111)	$13^0\ 5\frac{1}{2}'$	$13^0\ 8\frac{1}{2}'$	$-3'$
(111)	$21^0\ 12\frac{1}{2}'$	$21^0\ 15'$	$-2\frac{1}{2}'$
(222)	$27^0\ 4'$	$27^0\ 3\frac{1}{2}'$	$+\frac{1}{2}'$
(220)	$37^0\ 53'$	$37^0\ 52'$	$+1'$
(113)	$40^0\ 53'$	$40^0\ 53'$	$\pm 0'$

Zum Schluß dieses Paragraphen mögen noch die Genauigkeiten der beiden Verfahren verglichen werden. In der Tabelle I haben wir sowohl die von Braggs[1]) mit $\lambda_{Pt,\alpha}$ am Kalkspat als auch die von Debye und Scherrer (l. c.) mit $\lambda_{Cu,\alpha}$ am Graphit erhaltenen Glanzwinkel $\frac{\vartheta}{2}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen und die so berechneten Werte neben die gemessenen gesetzt. Die Differenzen zeigen, daß die Fehler beim spektrometrischen und beim spektrogrammetrischen Verfahren von einer und derselben Größenordnung sind.

§ 2. Die ganzzahligen Relationen.

Wir knüpfen zuerst an den rhomboedrischen Fall an, d. h. wir setzen zunächst als bekannt voraus, daß das vorgelegte Spektrogramm von einem Kristall herrührt, der zum rhomboedrischen System gehört. Es handelt sich alsdann um die Aufgabe, zwei Zahlen α, β so zu bestimmen, daß die quadratische Form

$$\varrho = \alpha(h^2+k^2+l^2)+\beta(yz+zx+xy) \quad (1) = (\mathrm{Vd})$$

eine Reihe gegebener Werte $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, nämlich die Quadrate der am Film gemessenen Werte $\sin\frac{1}{2}\vartheta_1, \sin\frac{1}{2}\vartheta_2, \ldots$, für niedrige ganzzahlige Wertsysteme x, y, z annimmt. Dabei ist nicht gesagt, für welche Wertsysteme x, y, z die einzelnen ϱ-Werte von der quadratischen Form angenommen werden; vielmehr ist gerade diese Zuordnung zu ermitteln; hat man die Zuordnung, so ergeben sich nachher die Werte von α und β leicht unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.

1. Wir greifen zunächst drei aus den beobachteten ϱ-Werten heraus, sie mögen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ heißen; (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), seien die noch unbekannten ganzzahligen Wertsysteme, für die die quadratische Form bzw. die Werte $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ annimmt, also

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= \alpha(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+\beta(y_1z_1+z_1x_1+x_1y_1) \\
&= \alpha p_1+\beta q_1 \\
\varrho_2 &= \alpha(x_2^2+y_2^2+z_2^2)+\beta(y_2z_2+z_2x_2+x_2y_2) \\
&= \alpha p_2+\beta q_2 \\
\varrho_3 &= \alpha(x_3^2+y_3^2+z_3^2)+\beta(y_3z_3+z_3x_3+x_3y_3) \\
&= \alpha p_3+\beta q_3;
\end{aligned} \quad (2)$$

die zur Abkürzung mit p, q bezeichneten Verbindungen der x, y, z sind, wenn auch ihre Werte noch unbekannt sind, jedenfalls wie diese einigermaßen niedrige-ganze Zahlen. Sollen nun die drei Gleichungen (2) für die zwei Unbekannten α, β bestehen, so muß ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 & p_1 & q_1 \\ \varrho_2 & p_2 & q_2 \\ \varrho_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

sein, oder, wenn man nach den Elementen der ersten Kolonne entwickelt, es muß

$$\begin{aligned}
&\varrho_1(p_2q_3-p_3q_2)+\varrho_2(p_3q_1-p_1q_3) \\
&\quad+\varrho_3(p_1q_2-p_2q_1)=0
\end{aligned} \quad (4)$$

sein: im rhomboedrischen Falle besteht zwischen je drei ϱ-Werten eine dreigliedrige Relation von der Gestalt

$$u_1\varrho_1+u_2\varrho_2+u_3\varrho_3=0, \quad (5)$$

deren Koeffizienten u_1, u_2, u_3 niedrige ganze Zahlen sind.

2. Zwischen je drei ϱ-Werten besteht im allgemeinen nur eine solche ganzzahlige Relation von der Gestalt (5). Bestünden nämlich zwischen denselben drei Werten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ zwei solche Relationen

$$\begin{aligned}
u_1\varrho_1+u_2\varrho_2+u_3\varrho_3&=0, \\
v_1\varrho_1+v_2\varrho_2+v_3\varrho_3&=0,
\end{aligned}$$

1) W. H. Bragg and W. L. Bragg, X rays and crystal structure, p. 116. London 1915.

so verhielten sich $\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3$ wie

$$(u_2 v_3 - u_3 v_2) : (u_3 v_1 - u_1 v_3) : (u_1 v_2 - u_2 v_1),$$

d. h. wie ganze Zahlen. In diesem Falle würde die Auflösung von irgend zweien der drei Gleichungen (2) nach den Unbekannten α, β einen rationalen Wert für das Verhältnis $\alpha : \beta$ ergeben. Nun hängen α, β wie aus § 1 hervorgeht, in einfacher Weise mit der Gestalt des rhomboedrischen Elementarparallelepipeds zusammen, diese variiert stetig mit der Temperatur u. a. m.; es ist daher die Annahme gerechtfertigt, daß $\alpha : \beta$ keinen rationalen Wert hat; dann kann also nur eine ganzzahlige Relation zwischen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 bestehen. Eine Ausnahme werden nur diejenigen Tripel von ϱ-Werten bilden, für die jene Auflösung der Gleichungen (2), und zwar bei je zwei der drei Gleichungen versagt; dies tritt nur ein, wenn

$$p_2 q_3 - p_3 q_2 = 0,\quad p_3 q_1 - p_1 q_3 = 0,\quad p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0$$

ist, d. h. wenn $p_1 : q_1 = p_2 : q_2 = p_3 : q_3$.

Der einfachste Fall, in dem für zwei Wertsysteme (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) die Proportion $p_1 : q_1 = p_2 : q_2$ gilt, ist natürlich derjenige, wo $x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2$; daß er aber nicht der einzige Fall ist, lehrt das Beispiel (1, —1, 0), (—2, 1, 1) zweier nicht proportionaler Wertsysteme, für die $(p_1, q_1) = (2, -1)$, $(p_2, q_2) = (6, -3)$ ist.

3. Sind irgend drei ganzzahlige Wertsysteme (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) gegeben, so ergibt (4) die dreigliedrige Relation, die zwischen den zugehörigen ϱ-Werten besteht. Die folgende kleine Tabelle gestattet, diese Relation unmittelbar abzulesen. Sie enthält in ihrem linken Teil die niedrigsten Wertsysteme x, y, z in einer sich natürlich ergebenden Reihenfolge, in ihrem rechten Teil die Werte von $p_a q_b - p_b q_a$ für alle niedrigen Zahlenpaare a, b. Sind nun z. B. die Tripel Nr. 1 (1,00), Nr. 3 (1, —1, 0) und Nr. 4 (1, 1, 1) gegeben, so greife man aus der Tabelle dasjenige Rechteck heraus, das von ihr übrig bleibt, wenn man alle anderen Zeilen und Kolonnen außer der 1., 3., 4. wegläßt (in der Tabelle ist es durch Unterstreichen markiert): $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ * & 9 \end{pmatrix}$; alsdann ist $9\sigma_1 - 3\sigma_3 - \sigma_4 = 0$ die gesuchte Relation zwischen den drei ϱ-Werten σ_1, σ_2, σ_3, die den drei Wertsystemen Nr. 1, 3, 4 zugehören.

Tabelle II.

Nr.	x	y	z	p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	1	0	*	1	−1	3	−1	0	2	−2	5	−1	−3	4
2	1	1	0	2	1	.	*	−4	3	−5	−4	−1	−9	4	−8	−12	0
3	1	−1	0	2	−1	.	.	*	9	1	4	9	1	16	4	0	16
4	1	1	1	3	3	.	.	.	*	−12	−12	−9	−21	−3	−21	−27	−12
5	1	1	−1	3	−1	.	.	.	.	*	4	11	−1	21	3	−3	20
6	2	0	0	4	0	.	.	.	.	.	*	8	−8	20	−4	−12	16
7	2	1	0	5	2	.	.	.	.	.	.	*	−20	13	−17	−22	4
8	2	−1	0	5	−2	.	.	.	.	.	.	.	*	37	7	−3	36
9	2	1	1	6	5	.	.	.	.	.	.	.	.	*	−36	−48	16
10	2	−1	1	6	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	−12	32
11	−2	1	1	6	−3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	48
12	2	2	0	8	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*

4. Wären die sämtlichen ϱ-Werte bekannt, die die quadratische Form für ganzzahlige Werte x, y, z annehmen kann, und alle diese völlig exakt, so besäße man auch unmittelbar die ganzzahligen Relationen zwischen je drei ϱ-Werten, und es wäre an der Hand der Tabelle leicht, die einzelnen Relationen herauszusuchen und so umgekehrt die Tripel von Wertsystemen (x, y, z) zu ermitteln, die den einzelnen Tripeln von ϱ-Werten zugehören. Die Schwierigkeiten der Aufgabe entspringen aus den folgenden Umständen:

1. die ϱ-Werte liegen nicht exakt vor, sondern sind mit Beobachtungsfehlern behaftet.
2. Die Debye-Scherrerschen Filme enthalten nicht sämtliche Werte, die die quadratische Form für ganzzahlige x, y, z annimmt, sondern nur diejenigen, die den Wert 1 nicht übersteigen, da für die übrigen $\sin\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\varrho} > 1$, also ϑ imaginär ausfällt (totale Reflexion).
3. Auch diese endlichvielen ϱ-Werte sind auf dem Film verschieden stark, manche fehlen gänzlich infolge vollständiger Interferenz.

§ 3. Erste Methode (Methode des Jacobischen Algorithmus): es sind wenige genaue Werte gegeben.

Wenn nicht drei, sondern zwei Zahlen ϱ_1, ϱ_2 gegeben sind, zwischen denen eine zweigliedrige

ganzzahlige Relation $u_1\varrho_1 + u_2\varrho_2 = 0$ besteht, so dient der sogenannte Kettenbruchalgorithmus dazu, diese Relation, d. h. das Verhältnis $u_1 : u_2 = -\varrho_2 : \varrho_1$ zu ermitteln. Herr Debye hat sich seiner bei Kristallen des regulären Systems, die auf lauter zweigliedrige Relationen führen, gelegentlich bedient. Nun hat C. G. J. Jacobi[1]) einen Algorithmus aufgestellt, der für den Fall von drei- und mehrgliedrigen ganzzahligen Relationen das Analoge leistet. Wir wollen ihn an der Hand eines Beispiels schildern, ohne dabei den gewöhnlichen Kettenbruchalgorithmus als bekannt vorauszusetzen.

1. Wir knüpfen an die erste der beiden Aufnahmen an, die Debye und Scherrer vom Graphit gemacht haben, und welche 5 relativ genaue Werte von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ lieferte. Wir bezeichnen die mit 10^4 multiplizierten Quadrate dieser 5 Werte als $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5$ und haben demgemäß $\varrho_1 = 513$, $\varrho_2 = 1308$, $\varrho_3 = 2070$, $\varrho_4 = 3771$, $\varrho_5 = 4283$. Wir suchen als erste die ganzzahlige Relation zwischen ϱ_1, ϱ_4, ϱ_5 oder 513, 3771, 4283. Wir dividieren mit der kleinsten der drei Zahlen, ϱ_1, in die beiden übrigen hinein und ermitteln die Reste

$$\varrho_4 - 7\varrho_1 = 180 \text{ und } \varrho_5 - 8\varrho_1 = 179;$$

diese beiden Reste vereinigen wir mit dem Divisor ϱ_1 zu einem neuen Tripel, das wir nach demselben Rezept behandeln: wir dividieren wiederum mit der kleinsten der drei Zahlen, diesmal 179, in die beiden anderen hinein und vereinigen sie mit den beiden Resten zu einem neuen Tripel usf. Wir führen daneben Buch darüber, wie sich die jeweiligen Reste aus ϱ_1, ϱ_4, ϱ_5 zusammensetzen, und wir tun gut, noch eine dritte Buchführung über die mögliche Genauigkeit der jeweils gebildeten Verbindungen daneben zu setzen[1]).

4283	3771	513	ϱ_5	ϱ_4	ϱ_1	17	15	2
179	180	513	$\varrho_5 - 8\varrho_1$	$\varrho_4 - 7\varrho_1$	ϱ_1	33	29	2
179	1	154	$\varrho_5 - 8\varrho_1$	$\varrho_4 - \varrho_5 + \varrho_1$	$17\varrho_1 - 2\varrho_5$	33	34	68

Die 3. Liste zeigt, daß die 1 allein unter die möglichen Fehlergrenzen fällt; wir können daher das Verfahren an dieser Stelle abbrechen und schließen, daß innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen $\varrho_4 - \varrho_5 + \varrho_1 = 0$ hinreichend genau gilt — das wäre im vorliegenden Falle zufällig leicht zu raten gewesen —, aber auch, was mehr ist, daß keine andere Relation mit niedrigen Koeffizienten innerhalb der Fehlergrenzen mit dieser einen in Konkurrenz tritt. In ähnlicher Weise würde die Behandlung von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ergeben, daß $\varrho_3 - 4\varrho_1 = 0$ und keine andere Relation sich mit den Fehlergrenzen verträgt.

2. Ungewöhnliche Schwierigkeiten treten bei der Ermittlung der noch fehlenden 3. Relation, etwa zwischen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_4 auf; sie sollen deshalb besprochen werden. Man erhält hier

3771	1308	513	ϱ_4	ϱ_2	ϱ_1	15	5	2
180	282	513	$\varrho_4 - 7\varrho_1$	$\varrho_2 - 2\varrho_1$	ϱ_1	29	9	2
180	102	153	$\varrho_4 - 7\varrho_1$	$\varrho_2 - \varrho_4 + 5\varrho_1$	$15\varrho_1 - 2\varrho_4$	29	30	60
78	102	51	$2\varrho_4 - \varrho_2 - 12\varrho_1$	$\varrho_2 - \varrho_4 + 5\varrho_1$	$10\varrho_1 - \varrho_4 - \varrho_2$	59	30	40
27	0	51	$3\varrho_4 - 22\varrho_1$	$3\varrho_2 + \varrho_4 - 15\varrho_1$	$10\varrho_1 - \varrho_4 - \varrho_2$	89	60	40.

Hier sind es die beiden Reste 27 und 0 zugleich, die unter die Fehlergrenze fallen, und man erhält nicht nur eine einzige mögliche Relation, sondern zwei verschiedene

$$3\varrho_4 - 22\varrho_1 = 0 \text{ und } 3\varrho_2 + \varrho_4 - 15\varrho_1 = 0,$$

von denen man also noch beliebige Kombinationen bilden kann. Es liegt nahe, in einem solchen ungewöhnlich unbequemen Falle eine solche Kombination der beiden Relationen zu wählen, deren Koeffizienten möglichst niedrig sind. In Rücksicht auf die allein hohen Koeffizienten 22 und 15 von ϱ_1 wird das Doppelte der 1. Relation, vermindert um das Dreifache der 2. Relation diese Forderung am ehesten erfüllen[2]):

$$\varrho_1 - 9\varrho_2 + 3\varrho_4 = 0;$$

man verifiziert leicht, daß sie im Rahmen der Fehlergrenzen wirklich möglich ist.

3. Damit sind zunächst sämtliche dreigliedrigen Relationen zwischen den fünf Werten ermittelt. Wir entnehmen nun aus der Tabelle von § 2, daß die Relation $\varrho_1 - 9\varrho_2 + 3\varrho_4 = 0$ auf die einzige niedrige Weise von den Wertsystemen Nr. 4, 1, 3 erfüllt wird. Wir versuchen es also, diese einander zuzuordnen und finden weiter aus der Tabelle, daß zwischen Nr. 3, 4 und 7 (und keiner anderen als 7) die Relation $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ * & -9 \end{pmatrix}$, d. h. $-9\sigma_3 - 9\sigma_4 + 9\sigma_7 = 0$ oder $\sigma_3 + \sigma_4 - \sigma_7 = 0$ besteht, so daß ϱ_5 dem Wertsystem Nr. 7 zugeordnet werden darf; in

1) Werke, 6, S. 385—426.

2) Man könnte übrigens auch tiefere zahlentheoretische Überlegungen zur Motivierung dieser Kombination benutzen.

1) Die fünf ϱ-Werte selbst sind nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn Debye auf 4 Promille genau; danach hat z. B. $180 = \varrho_4 - 7\varrho_1$ einen möglichen Fehler von $15 + 7.2 = 29$ Einheiten usw.

dieser Möglichkeit liegt die Bestätigung der noch etwas vagen Zuordnung des ersten Tripels ϱ_1, ϱ_2, ϱ_4 mit Nr. 4, 1, 3. Jedenfalls ist damit für die gegebenen fünf Werte im Rahmen ihrer Fehler eine Lösung der Aufgabe gefunden.

4. Die Genauigkeit von 4 Promille in den

$$\varrho = \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

hat knapp genügt, um den Jacobischen Algorithmus in allen Fällen durchzuführen. Es wird deshalb nicht überflüssig sein, zu bemerken, daß auch weit ungenauere, aber (im Sinne von § 2, 4, Nr. 2) „sämtliche" ϑ enthaltende Filme für die vorliegende Methode benutzt werden können. Die Herren Debye und Scherrer haben z. B. vom Graphit eine zweite Aufnahme gemacht, deren ϱ-Werte um 1 Proz. bis 2 Proz. ungenau sind, die dafür aber alle ϱ-Werte enthält, die nicht durch Interferenz oder totale Reflexion ausfallen. Auch aus dieser kann man sich einige genauere Werte herauspräparieren, indem man folgendermaßen operiert. Sei etwa ϱ_1 der kleinste der beobachteten ϱ-Werte, und sei (x_1, y_1, z_1) das noch unbekannte Wertsystem, für welches die quadratische Form den Wert ϱ_1 annimmt; dann wird sie für $(2x_1, 2y_1, 2z_1)$ den Wert $4\varrho_1$, für $(3x_1, 3y_1, 3z_1)$ den Wert $9\varrho_1$ annehmen usf.[1]). Soweit diese Werte kleiner als 1 bleiben, müssen sie sich also unter den beobachteten finden, eben da der Film alle diese Werte aufweist. Kombiniert man bei dem genannten 2. Graphit-Film diese Überlegung mit der Analyse der α- und β-Strahlung, die Debye und Scherrer vornehmen, so erhält man im ganzen acht Werte, die mit ϱ_1 in Einklang zu bringen sind, und somit eine Korrektur von ϱ_1, die das Mittel aus acht Beobachtungen ist. Indem man dies nach Möglichkeit für die anderen niedrigsten ϱ-Werte ebenso durchführt, erhält man für eben jene fünf Werte, die aus der 1. Graphitaufnahme bekannt sind, neue Werte; wir stellen sie einander gegenüber und fügen diejenigen Werte hinzu, die man durch Ausgleichungsrechnung aus den Werten der 1. Aufnahme auf Grund der bereits gefundenen Zuordnung berechnet.

	beobachtet	ausgeglichen aus der 1. Aufnahme	präpariert a. d. 2. Aufn.
ϱ_1	513	517	517
ϱ_2	1308	1314	1315
ϱ_3	2070	2069	2068
ϱ_4	3771	3768	3770
ϱ_5	4283	4285	(4290)

1) Einer ähnlichen Überlegung bedient sich auch Herr Runge, S. 510f. vor Eintritt in sein Verfahren.

Man sieht also, daß die aus der 2. Aufnahme präparierten Werte gewiß nicht weiter von der Wahrheit abstehen, als die der genaueren 1. Aufnahme, die zur Durchführung des Jacobischen Algorithmus genügten.

§ 4. Zweite Methode: Ein vollständiger, ungenauerer Film.

Wenn ein weniger genauer Film, wie z. B. die 2. Graphitaufnahme von Debye und Scherrer, ganz ausgemessen ist, kann man außer dem am Ende von § 3 geschilderten Verfahren auch ein anderes einschlagen, das den Jacobischen Algorithmus nicht benutzt. Man wird damit beginnen, die Werte einer solchen Textkritik zu unterziehen, wie sie am Ende von § 3 angedeutet wurde und wie sie auch Herr Runge voranschickt. Sei damit, um bei der 2. Debye-Scherrerschen Graphitaufnahme zu bleiben, folgende Reihe von ϱ-Werten bereits ermittelt[1]).

$\tau_1 = 51{,}7$; $\tau_2 = 132$; $\tau_3 = 147$; (207), 217, 271, 377, 403, 429, (466), 486, (517), 587, 650, 696, 790, 828, 841, (872), 895, 904.

Wir nehmen die oberste Relation, die in der Tabelle überhaupt vorkommt, $4\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3$, und suchen drei unter den Werten $\tau_1, \tau_2, \ldots$, die für eine solche Relation innerhalb der Fehlergrenze von 2 Proz. in Betracht kommen. Anstatt also drei bestimmte ϱ-Werte zu nehmen und wie bei der 1. Methode die ganzzahlige Relation zu suchen, die zwischen ihnen besteht, nehmen wir hier die Relation fest und suchen dazu die ϱ-Werte. Wir bilden $4 \cdot 51{,}7 = 206{,}8$ oder 207 und suchen zwei andere ϱ-Werte, deren Summe etwa 207 ist; das gibt es sichtlich nicht. Wir versuchen es deshalb mit $4 \cdot 132 = 528$; es ist $377 + 147 = 524$ von 528 um 4 Einheiten entfernt, während 2 Proz. mit 10 Einheiten übereinkommen. Wir versuchen es mit dieser ersten Möglichkeit, die sich bietet, ordnen also die Werte τ_2, τ_3, τ_6 den Wertsystemen Nr. 1, 2, 3 zu, wobei noch Nr. 2 und 3 ihre Rolle vertauschen können wegen der Symmetrie, mit der sie in die gewählte Relation eingehen. Ordnen wir, um mit einem der beiden zu unterscheidenden Fälle zu beginnen, τ_3 und Nr. 2 einander zu, so haben wir zwischen Nr. 1, 2, 4 gemäß der Tabelle die Relation $3\sigma_1 - 3\sigma_2 + \sigma_4 = 0$; wir müssen also ein τ suchen, für das $3\tau_2 - 3\tau_3 + \tau_4 = 0$ ist; dieses wird Nr. 4 zuzuordnen sein. Nun ist $3 \cdot 132 - 3 \cdot 147 = -3 \cdot 15 = -45$ mit ± 6 als etwa möglichem Fehler; $\tau_1 = 52$ kann allenfalls da-

1) Die 4fachen, 9fachen usw., die zur Korrektur dienten, sind dabei eingeklammert.

mit stimmen. Ebenso liefert $-5\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_5 = 0$, daß $5 \cdot 132 - 147 = 513$ mit $\tau_{10} = 517$ hinlänglich übereinstimmt usf. Man braucht nur den anderen der beiden erwähnten Fälle nachträglich ebenso durchzugehen, um zu sehen, wie unmöglich es ist, mit ihm in ähnlicher Weise zurecht zu kommen. Auf diese Weise finden dann sämtliche τ ihre unmittelbare Einordnung.

§ 5. Der allgemeine Fall. Vergleich mit der Rungeschen Methode.

Es wurde bisher nur an Kristalle des rhomboedrischen Systems gedacht. Dieselben Methoden sind unverändert auch auf den tetragonalen und hexagonalen Fall anwendbar. Man kann in diesen Fällen die quadratische Form in die Gestalt setzen

$\alpha x^2 + \beta(y^2 + z^2)$ im tetragonalen Falle,
$\alpha x^2 + \beta(y^2 - yz + z^2)$ „ hexagonalen „ ,

und hat dementsprechend lediglich die obige Tabelle I durch eine der beiden folgenden zu ersetzen:

Tabelle III (tetragonal)[1].

Nr.	x	y	z	p	q	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	1	0	*	1	1	2	1	4	5	5
2	0	1	0	0	1	.	*	−1	−1	−4	−1	−1	−4
3	1	1	0	1	1	.	.	*	1	−3	3	4	1
4	1	1	1	1	2	.	.	.	*	−7	2	3	−3
5	2	1	0	4	1	.	.	.	.	*	15	19	16
6	1	2	0	1	4	.	.	.	.	.	*	1	−11
7	1	2	1	1	5	.	.	.	.	.	.	*	−15
8	2	2	1	4	5	.	.	.	.	.	.	.	*

Tabelle IV (hexagonal)[1].

Nr.	x	y	z	p	q	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	1	0	*	1	1	3	1	4	3	7
2	0	1	0	0	1	.	*	−1	−1	−4	−1	−4	−1
3	1	1	1	1	1	.	.	*	2	−3	3	−1	6
4	1	1	−1	1	3	.	.	.	*	−11	1	−9	4
5	2	1	0	4	1	.	.	.	.	*	15	8	27
6	1	2	0	1	4	.	.	.	.	.	*	−13	3
7	2	1	−1	4	3	.	.	.	.	.	.	*	25
8	1	2	−1	1	7	.	.	.	.	.	.	.	*

Sieht man von dem von Debye und Scherrer selbst ausreichend erledigten regulären System ab, so sind also unsere Methoden auf 3 der 6 übrigen Systeme unmittelbar anwendbar. Obgleich es möglich wäre, sie auch noch auf das dreiparametrige rhombische System auszudehnen, scheint es, daß sie da in ihrer Wirksamkeit gegenüber der Rungeschen Methode zurücktreten und bei den beiden übrigen Systemen gewissermaßen in dieser aufgehen würden.

Wir können das Verfahren von Herrn Runge von unserem Standpunkt aus dahin charakterisieren, daß Herr Runge sich einer einzigen, speziellen viergliedrigen Relation bedient, nämlich der Relation $2(\varrho_1 + \varrho_2) = \varrho_3 + \varrho_4$. Soweit es sich um Kristalle der 3 genannten zweiparametrigen Systeme handelt, scheint unsere Methode der Rungeschen gewisse Vorteile gegenüberzustellen:

1. Wir binden uns nicht an eine einzige Art von Relation, sondern können es mit den verschiedensten probieren, wenn wegen Ungenauigkeit einiger ϱ-Werte oder Interferenzausfall eine versagen sollte.

2. Wir erhalten unmittelbar mit einem Schlage die Koeffizienten der Form, die dem besonderen Charakter des Systems angepaßt ist, also z. B. im rhomboedrischen Fall die Gestalt (1) hat. Herr Runge erhält zuerst irgendeine quadratische Form, und muß die Transformation auf die spezielle Gestalt (1) erst nachträglich auffinden.

Es wurde bisher vorausgesetzt, daß man von vornherein weiß, welchem der sieben Systeme der aufgenommene Kristall angehört. Die Rungesche Methode setzt diese Kenntnis nicht voraus. In denjenigen Fällen also, in denen diese Kenntnis fehlt, bleibt zu erörtern, was von unseren Methoden noch wirksam bleibt. Zunächst wird man selbst in diesen Fällen häufig noch aus der Reichhaltigkeit des Films vermuten können, ob es sich um ein niedrig-parametriges System handelt oder nicht. Bedient man sich aber erst des Ansatzes, daß überhaupt ein zweiparametriges System vorliegt, so läßt die 2. Methode z. B. ganz von selbst merken, welches der 3 Systeme vorliegt. Die Relation $4\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3$ z. B., die oberste von Tabelle II, kommt in Tabelle III, auch bei weiterer Fortsetzung als oben, nicht so bald vor. Erweist sie sich als gangbar, so wird man an die Möglichkeit des tetragonalen Systems nicht mehr viel zu denken brauchen; andernfalls wird man durch ähnliche Überlegungen sofort zum Ziel kommen.

Was jedoch die 1. unserer beiden Methoden und den Jacobischen Algorithmus anbelangt, so ist dieser natürlich nicht auf die dreigliedrigen Relationen beschränkt, für die er oben auseinandergesetzt wurde. Im triklinen Falle muß man sieben ϱ-Werte herausziehen, um die sechs Koeffizienten der quadratischen Form zu eliminieren; im triklinen Falle besteht also zwischen je sieben ϱ-Werten eine ganzzahlige Relation; daneben gibt es spezielle Systeme von vier und solche von sechs ϱ-Werten, zwischen denen ganzzahlige Relationen vorhanden sind;

1) Im Gegensatz zu Tabelle I ist hier von solchen Wertsystemen, die proportionale $p : q$ liefern, stets nur eines aufgeführt, um möglichst viel verschiedene Relationen in einer kleinen Tabelle zu vereinigen.

ist das System nicht triklin, so bleiben die ebengenannten Relationen bestehen, aber es treten viele neue mit geringerer Gliederzahl hinzu. Die Anwendung des Algorithmus belehrt aber selbsttätig darüber, wieviel parametrig das System ist, und ob es insbesondere zweiparametrig ist. Ist dies erst festgestellt, so treten wieder die oben angestellten Erwägungen an der Hand der Tabellen II—IV in Kraft.

(Eingegangen 7. Dezember 1917.)

BESPRECHUNGEN.

W. Porstmann, Normenlehre, Grundlagen, Reform und Organisation der Maß- und Normensysteme, dargestellt für Wissenschaft, Unterricht und Wirtschaft. (Band 8 der Allgemein-pädagogischen Schriften, herausgegeben von Karl Rößger, Leipzig.) VIII u. 256 S. mit 28 Abbildungen. Leipzig und Prag, Schulwissenschaftlicher Verlag A. Haase. 1917. geb. M. 7.—

Das Buch ist sehr merkwürdig und wird vom Leser mit steigendem Interesse, um nicht zu sagen Spannung gelesen werden. Obwohl man nicht sagen kann, daß der Titel unrichtig gewählt sei, werden sich die meisten nach ihm allein gar kein Bild vom Inhalt machen können. Es handelt von den Normen oder Grundeinheiten der Längen-, Flächen-, Raummessung, der Winkel- und Zeitmessung, der Gewichte, Münzen, Formate, also von Dingen, die wohl fast allen von uns als herzlich langweilig erscheinen — ein Zeichen dafür, daß sie uns eben noch nicht Gegenstand des Nachdenkens geworden sind. In Porstmanns Buch sind sie Gegenstand einer kritischen und organisierenden Untersuchung von sehr systematischer Art. Einzelne Fragen, wie die Kalenderreform, mögen schon für sich in ähnlicher Weise früher behandelt worden sein, die zusammenfassende Betrachtung aller dieser Gebiete mit ihren Zusammenhängen ist ganz neu und überaus fesselnd. Man erfährt weniger, welches die gebräuchlichen Normen sind, als wie sie sein müßten, nämlich um die größte Einfachheit zu gewährleisten. Das ganze Buch ist eine systematische Untersuchung darüber, wie alle diese Normen auszusehen hätten, um die denkbar größte Einfachheit und Energieersparnis in ihrer Anwendung zu ermöglichen. Einen Teil der Darstellung bildet natürlich jedesmal die Kritik am Bestehenden, wobei der geschichtliche Nonsens, aus dem die meisten dieser Normen zusammengekleistert sind, erbarmungslos aufgedeckt wird.

Ein Beispiel: Die Winkelmessung. Der Winkelgrad — ungefähr der Winkel, den die Sonne an einem Tage unter den Sternen zurücklegt — ist ein Jahrtausende altes Vermächtnis, welches wir aus Trägheit und wegen seines ehrwürdigen Alters festhalten, obwohl gerade das große Alter uns schon verdächtig sein müßte. In der Tat läßt es sich durch nichts verteidigen, daß man eine allgemeine Aufgabe, wie die zweckmäßigste Teilung des Vollkreises, durch Heranziehung einer speziellen Erscheinung, wie der Sonnenbewegung, zu lösen sucht. Das Naturgemäße ist vielmehr auch hier die fortgesetzte Teilung in 10 Unterteile, und zwar ist der Vollkreis — Verf. nennt ihn „ein Dopi" $= 2\pi$ — in Dezimalen einzuteilen. Die alte Gradteilung benutzt statt dessen die ganz willkürliche Teilung in 360 „Grade", deren jeder wieder in anderem Maß, nämlich in 60 „Minuten" zu 60 „Sekunden" untergeteilt wird, und um die Verwirrung voll zu machen, wird zum Schluß noch eine Dezimalteilung in Zehntel- und Hundertstelsekunden angeklebt. Ein Winkel von beispielsweise 139° 45′ 57,32″ stellt vom Standpunkt der Normenorganisation geradezu einen Hexensabbat von verschiedensten und ganz unlogischen Einteilungsgründen dar. Nach der logisch einwandfreien Teilung in „Millidopi" schreibt er sich: 388, 238 672 millidopi.

Ein ganz entsprechendes Kapitel bildet die Zeitmessung. Die übliche Unterteilung des Tages in 24 Stunden und die weitere Teilung dieser in 60 Minuten zu 60 Sekunden läßt sich gleichfalls logisch nicht rechtfertigen. Das Gegebene ist vielmehr, die natürliche Einheit, den Tag, dezimal zu teilen, nämlich in „Millitag". In den astronomischen Formeln würde dann die lästige Umrechnung von Winkel auf Zeit und umgekehrt fortfallen, da 1000 Millitag ebenso wie 1000 Millidopi dem Vollkreis entsprechen.

Gerade die Zeitmessung ist übrigens ein Beispiel für den Fall, daß man nicht mit einer einzigen Grundeinheit auskommt. Denn auch das Jahr ist so eng mit unserem Leben verknüpft, daß wir es nicht unberücksichtigt lassen können. Da Jahr und Tag inkommensurabel sind, ergibt sich die Notwendigkeit, eine Schalteinrichtung, einen Kalender, zu schaffen. Auch hier ergibt die Kritik unseres gregorianischen Kalenders vieles, ja überraschend vieles, was unzweckdienlich, schwülstig und verbesserungsfähig ist. Bekanntlich wird das Problem der Kalenderreform gerade im Kriege mit Hinblick auf die Möglichkeit, die der Friedensschluß für derartige Reformen bietet, eifrig diskutiert, und Herman Reese, der Erfinder der Sommerzeit, entfaltet bereits seit längerem eine rührige Propaganda für praktisch die gleiche Reform, welche Verf. hier im Zusammenhange mit den übrigen Reformen des Normenwesens ausarbeitet. Den meisten Lesern wird bereits bekannt sein, daß es sich dabei nicht nur um die Festlegung der beweglichen Feste, sondern auch um eine starre Verbindung des Wochentages mit dem Datum und um einen Ausgleich der Monatslängen handelt.

In der oben flüchtig skizzierten Weise werden sämtliche Abschnitte behandelt. Im ersten Kapitel, über **Längenmessung**, wird das Meter als Norm kritisiert und angenommen, und hieraus die abgeleiteten Normen als das Tausendfache bzw. das Tausendstel der Grundnorm entwickelt. *Km, m, mm, μ, μμ* lautet diese Normenreihe. Das Zehnfache und Hundertfache erweist sich als unnötige Zwischennorm, die meist auch in der Praxis unbenutzt bleibt. Später wird gezeigt, daß dies „Dreistellenprinzip" eine allgemeine Bedeutung hat und in hohem Maße die Mengenbeherrschung erleichtert. Natürlich folgt daraus, daß wir es nun auch konsequent durchführen und das Zentimeter als physikalische Einheit abschaffen sollten.

Das zweite Kapitel behandelt die **Flächenmessung**, das dritte die **Raummessung**. Auch hier überrascht die Fülle vermeidbarer Unlogik, von der die heutige Anwendung der metrischen Maße wimmelt. Es ist sehr reizvoll, diese Launen aufzu-

spüren, die sich als Verstöße gegen Einfachheit und Übersichtlichkeit darstellen. Doch wollen wir darauf nicht eingehen. Auch auf die Gewichtsnormen mit ihrem deutlich befolgten Dreistellenprinzip (Ag, g, mg, γ, $\gamma\gamma$) und ebenso auf die Münzen wollen wir nicht eingehen und nur sagen, daß der Leser auch hier viel Neues und Interessantes findet. Die Kapitel „Mengennormen" und „Die Normierung der Normensysteme" sind vielleicht die wichtigsten. Hier wird die Normierung an sich logisch untersucht, d. h. die Frage, welches die einfachste Methode der Mengenbeherrschung ist, ohne Rücksicht darauf, um was für Mengen es sich handelt. Die 10 findet hier ihre Rechtfertigung, und das vom Verfasser erstmalig entdeckte Dreistellenprinzip ergibt sich auf allgemeiner Grundlage. Der schon besprochenen Winkel- und Zeitmessung sind die nächsten Kapitel gewidmet. Auch für die Erdgradteilung wird in einem kürzeren Kapitel die zweckmäßigste Reform vorgeschlagen. Einen langen Abschnitt bildet weiter die Formatreform, welche im Anschluß an W. Ostwalds leider eingegangenes Institut „Die Brücke" die Auffindung der zweckmäßigsten Formatreihe in neuer und gegen Ostwald verbesserter Weise behandelt. Ein Schlußkapitel handelt über „Abgeleitete Normen", zu denen u. a. die des Lichtes und der Temperatur gehören, um nur einige zu nennen.

Vielleicht genügt schon diese Übersicht, um diejenigen, die beim Lesen des Titels meinten, in dem Buche nur wohlbekannte Dinge zu finden, davon zu überzeugen, daß sie sich geirrt haben. Es ist Neuland, das hier zum erstenmal und — wie dem Referenten scheint — mit außerordentlichem Erfolg beackert ist. Denn ich muß gestehen, daß so gut wie alle Reformvorschläge überzeugend sind.

Die Frage, ob, wie und wann diese Reformen verwirklicht werden können, wird in dem Buche nicht erörtert. Es sind zwei verschiedene Dinge, ein Ideal aufzustellen, und es zu verwirklichen. Und es ist zweckmäßig, erst das erste zu tun, bevor man an das zweite geht. Porstmanns Buch geht nur darauf aus, die idealen Normen zu finden; es erhebt diese Fragen zum erstenmal zu einer Wissenschaft: der Lehre von den idealen Normen. Alfred Wegener.

Moritz Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Zur Einführung in das Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie. 8°. III u. 63 S. Berlin, J. Springer. 1917. Geh. M. 2.40.

Diese vorzüglich geschriebene Broschüre behandelt die Grundgedanken der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie von einem vorwiegend philosophischen Standpunkt aus und dürfte jedem Kenner der Einsteinschen Arbeiten von Interesse und Nutzen sein. Der Inhalt gliedert sich wie folgt: 1. Von Newton zu Einstein. 2. Die geometrische Relativität des Raumes. 3. Die mathematische Formulierung der räumlichen Relativität. 4. Die Untrennbarkeit von Geometrie und Physik in der Erfahrung. 5. Die Relativität der Bewegungen und ihr Verhältnis zur Trägheit und Gravitation. 6. Das allgemeine Relativitätspostulat und die Maßbestimmungen des Raum-Zeit-Kontinuums. 7. Aufstellung und Bedeutung des Grundgesetzes der neuen Theorie. 8. Beziehungen zur Philosophie. H. Hörig.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Karl Bunte für technische Chemie und Dr. Heinrich Brandt für Mathematik und Mechanik.

Ernannt: Der Konservator bei der Hauptstation für Erdbebenforschung und beim erdmagnetischen Observatorium in München Dr. Karl Lutz zum Professor, der ord. Professor der Chemie an der Universität Greifswald Dr. Otto Dimroth in gleicher Eigenschaft an der Universität Würzburg.

Berufen: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Basel Dr. Erich Hecke in gleicher Eigenschaft an die Universität Göttingen, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Zürich Dr. Hermann Weyl in gleicher Eigenschaft an die Universität Breslau.

Neuer Lehrauftrag: Dem Geh. Regierungsrat Professor Dr. Adolf Juckenack an der Technischen Hochschule Berlin für Chemie der Nahrungsmittel und chemisch-technische Analyse.

Verliehen: Dem ord. Professor der Mathematik an der Universität München Geh. Hofrat Dr. Aurel Voß der Titel Geheimer Rat, dem Abteilungsvorsteher beim Materialprüfungsamt in Berlin, ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. David Holde (anläßlich des Übertritts in den Ruhestand).

Gestorben: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Halle Geh. Regierungsrat Dr. Georg Cantor, der ord. Honorarprofessor für Geschichte der Mathematik an der Universität Straßburg Dr. Max Simon.

Angebote.

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung, der sich der drahtlosen Telegraphie zu widmen beabsichtigt oder bereits Erfahrungen auf diesem Gebiete besitzt, gesucht. Erwünscht sind Erfahrungen auf dem Gebiete der Elektronenemission und Vakuumtechnik.

Bewerbungen mit kurzem Lebenslauf und Gehaltsansprüchen erbeten an

Dr. Georg Seibt,
Fabrik funkentelegraphischer Apparate
Berlin-Schöneberg, Hauptstr. 11.

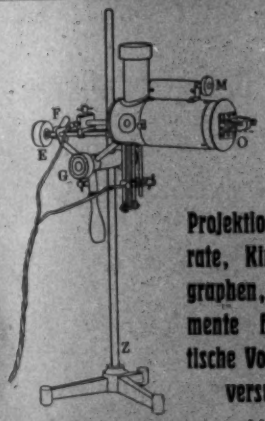
Physiker.

Wir suchen für unser Laboratorium mehrere **Physiker.** Herren mit Erfahrung auf dem Gebiet der Gasentladungen oder des Hochvakuums bevorzugt. Angaben über Lebenslauf, Militärverhältnis, Eintrittstermin, Gehaltsansprüche unter Beifügung von Zeugnisabschriften an

AEG

Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, Glühlampenfabrik,
Berlin NW. 87, Sickingenstr. 71.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Experimentier-Bogenlampe „Sigma", allseitig verstellbar, m. einstellbarem Linsensystem.

Projektionsapparate, Kinematographen, Instrumente für optische Vorlesungsversuche.

Listen unberechnet.

Ed. Liesegang, Düsseldorf.

Gegr. 1854. Briefkasten 124.

Induktorium

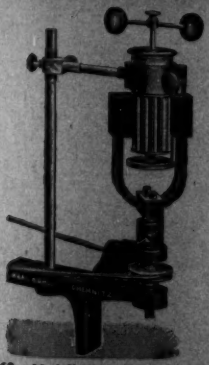
Patent Klingelfuß

mit eingebauter Meßspule und eingeschaltetem Sklerometer und Milliampèremeter. Beide Instrumente sind spannungslos gegen Erde und können in beliebiger Entfernung vom Induktorium und der Röntgenröhre aufgestellt werden.

Fr. Klingelfuß & Co., Basel.

MAX KOHL A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital M. 1600 000.



52068. Modell eines Kurzschlußankers nach Friedr. C. G. Müller, für die Schwungmaschine.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren

Ölluftpumpen

Experimentier-Schalttafeln

Projektions-Apparate

Laboratoriumsmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellg. Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

Inhaltsverzeichnis:

(T. = Tagesereignisse.)

	Seite
Absorptionsgesetze für Röntgenstrahlen, v. R. Glocker	66
Budde, E., Über Schwebungen. (Antwort an Herrn Waetzmann.)	60
Erfindungsinstitut: Ein deutsches —. (T.)	80
Federhofer, K., Berichtigung zu „Über das Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit“	80
Flüssige Kristalle: Die Hauptsätze der Lehre von den —, v. O. Lehmann	73
Frank, Ph., Josef Popper-Lynkeus. Zu seinem achtzigsten Geburtstag	57
Glocker, R., Absorptionsgesetze für Röntgenstrahlen	6
Jung, F., Zur Ableitung der Schwerefeldgleichungen	6
Kristalle: Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen —, v. O. Lehmann	7
Lehmann, O., Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen Kristallen	7
Popper-Lynkeus, Josef. Zu seinem achtzigsten Geburtstag. (Ph. Frank.)	5
Röntgenstrahlen: Absorptionsgesetze für —, v. R. Glocker	6
Schwebungen: Über —. Antwort an Herrn Waetzmann, v. E. Budde	6
Schwerefeldgleichungen: Zur Ableitung der —, v. F. Jung	6
Waetzmann: Über Schwebungen. Antwort an Herrn —, v. E. Budde	6

Zu kaufen gesucht

selbstregistrierendes Millivoltmeter

(bezw. Pyrometer) oder Registrierapparat nach Callendar.

Deutsche Gasglühlicht-Aktiengesellschaft (Auergesellschaft) Berlin O. 17.

Annalen vollständ. von Bd. 1 (1877) bis jetzt, mit allen Registerbd. u. Boltzmann-Festschr., eleg. braun. Lederbd. zu verkaufen. Preis 1000 M. Desgleichen

Physikal. Zeitschr. Bd. 1 bis jetzt. Leinwand 425 M. und

Elektrotechn. Zeitschr. Bd. 1 (1880) bis jetzt Leinwd. 260 M.

Unter AB 21, Verlag dieser Zeitschrift.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger

Mit besonderer Berücksichtigung des Bogens zwischen Metallelektroden

von

Prof. Dr. K. Willy Wagner

Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin.

Mit 44 Textfiguren. Preis geheftet M. 3.60 exkl. 25% Teuerungszuschlag.

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.